

ERNST-MORITZ-ARNDT-UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft

Ellipsenverfahren
zur betriebsübergreifenden simultanen
Losgrößen- und Bestellmengenplanung

Michael Lerm, Roland Rollberg

Diskussionspapier 06/2003

August 2003

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere

ISSN 1437 – 6989

<http://www.rsf.uni-greifswald.de/bwl/paper.html>

Dieses Werk ist durch Urheberrecht geschützt. Die damit begründeten Rechte, insbesondere die der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, des Nachdrucks, der Übersetzung, des Vortrags, der Mikroverfilmung oder Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur in Auszügen erfolgender Verwendung, vorbehalten. Eine vollständige oder teilweise Vervielfältigung dieses Werkes ist in jedem Fall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen der jeweils geltenden Fassung des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 zulässig. Grundsätzlich ist die Vervielfältigung vergütungspflichtig. Verstöße unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis.....	II
Symbolverzeichnis.....	III
1 Problemstellung und Aufbau des Arbeitsberichts	1
2 Konkretisierung der Planungssituation	4
3 Modellbildung.....	5
3.1 Subsystem Lieferant	5
3.2 Subsystem Abnehmer	10
3.3 Subsystem Umschlag und Transport	11
3.4 Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten des Zulieferer-Abnehmer-Segments...	12
4 Lösungsalgorithmus zur Ermittlung der kostenminimalen Losauflage- und Bestellhäufigkeit unter Ganzzahligkeitsbedingungen	14
4.1 Kostenminimum unter Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsbedingungen.....	14
4.2 Ableitung des einfachen Ellipsenverfahrens	19
4.3 Modifikation des einfachen Ellipsenverfahrens zum korrigierten Ellipsenverfahren..	25
4.4 Kombination von einfachem und korrigiertem Ellipsenverfahren zum zweistufigen Ellipsenverfahren	30
4.5 Veranschaulichung des zweistufigen Ellipsenverfahrens an Hand eines Beispiels	30
4.5.1 Beispieldaten des Zulieferer-Abnehmer-Segments.....	30
4.5.2 Optimierung mit dem zweistufigen Ellipsenverfahren	31
5 Kritische Würdigung	37
Anhang	39
Literaturverzeichnis.....	46

Abkürzungsverzeichnis

APS	Advanced Planning and Scheduling
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
et al.	et alii
f.	folgende
ff.	fortfolgende
Hrsg.	Herausgeber
Nr.	Nummer
S.	Seite(n)
SCM	Supply Chain Management
SNM	Supply Network Management
vgl.	vergleiche

Symbolverzeichnis

Indizes

ext	Extremwertindex; $\text{ext} \in \{\min, \max\}$
i	Summationsindex
X	Produktionslos- bzw. Bestellindex; $X \in \{L, B\}$

Variable

a	Ellipsenhalbachse
\hat{a}	Isokostenringhalbachse
b	Ellipsenhalbachse
\hat{b}	Isokostenringhalbachse
$H_{2 \times 2}$	HESSE-Matrix für eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen
K_T	Gesamtkosten im Planungszeitraum
K_T^A	Kosten des Subsystems Abnehmer im Planungszeitraum
K_T^L	Kosten des Subsystems Lieferant im Planungszeitraum
K_T^{\min}	reellwertiges Gesamtkostenminimum im Planungszeitraum
K_T^{rund}	Gesamtkosten im Planungszeitraum, die sich aus n_B^{ganz} und n_L^{rund} ergeben
K_T^{UT}	Kosten des Subsystems Umschlag und Transport
LA	Lagerabgang beim Lieferanten während t_{AZ}
L_{Ab}	kumulierter Lagerabgang beim Lieferanten während t_{AZ}
$L_{\text{Zu}}^{\text{gesch}}$	kumulierter Lagerzugang beim Lieferanten während t_{AZ} bei geschlossener Produktion
$L_{\text{Zu}}^{\text{offen}}$	kumulierter Lagerzugang beim Lieferanten während t_{AZ} bei offener Produktion
$L_{\text{Zu}}^{t_p}$	kumulierter Lagerzugang beim Lieferanten während t_p
$L_{\text{Zu}}^{t_w}$	kumulierter Lagerzugang beim Lieferanten während t_w
n	Gesamtanzahl von Produktions- oder Transportlosen im Planungszeitraum
n_B	Gesamtanzahl von Transportlosen im Planungszeitraum (Bestellhäufigkeit)
n_B^{ex}	möglicherweise kostenminimierende Bestellhäufigkeit im Planungszeitraum
n_B^{ganz}	sich aus dem Produkt von n_L^{rund} und q^{rund} ergebende ganze Zahl
n_B^{Mitte}	Mittelpunktcoordinate des Isokostenrings
n_B^{opt}	kostenminimierende Bestellhäufigkeit im Planungszeitraum
n_L	Gesamtanzahl von Produktionslosen im Planungszeitraum (Auflagehäufigkeit)
n_L^{ex}	möglicherweise kostenminimierende Auflagehäufigkeit im Planungszeitraum
n_L^{Mitte}	Mittelpunktcoordinate des Isokostenrings
n_L^{opt}	kostenminimierende Auflagehäufigkeit im Planungszeitraum
n_L^{rund}	gerundete kostenminimierende Auflagehäufigkeit im Planungszeitraum

q	ganzzahliges Verhältnis von n_B zu n_L
q^{opt}	Verhältnis von n_B^{opt} zu n_L^{opt}
q^{rund}	gerundetes Verhältnis von n_B^{opt} zu n_L^{opt}
t	Integrationsvariable über die Zeit
t_{AZ}	Dauer eines Auflagezyklus
t_{LZ}	Dauer eines Bestell- und Lieferzyklus
t_P	Zeit, in der während eines Auflagezyklus Zwischenprodukte gefertigt werden
t_W	Zeit, in der während eines Auflagezyklus der Abnehmer beliefert wird
x	beliebige reelle Zahl
\underline{x}	zweidimensionaler Spaltenvektor
\bar{x}	durchschnittlicher Lagerbestand beim Lieferanten während des Planungszeitraumes
\bar{x}_{AZ}	durchschnittlicher Lagerbestand beim Lieferanten während eines Losauflagezyklus
$\bar{x}_{AZ}^{\text{gesch}}$	durchschnittlicher Lagerbestand beim Lieferanten während eines Losauflagezyklus bei geschlossener Produktionsweise
$\bar{x}_{AZ}^{\text{offen}}$	durchschnittlicher Lagerbestand beim Lieferanten während eines Losauflagezyklus bei offener Produktionsweise
y	beliebige reelle Zahl
y_B	Bestellmenge des Abnehmers und Transportlosgröße
y_L	Produktionslosgröße des Lieferanten

Konstante

Cl	Lagerkostensatz
Cl_A	Lagerkostensatz des Abnehmers
Cl_L	Lagerkostensatz des Lieferanten
Cr	Rüstkostensatz
Cr_L	Rüstkostensatz des Lieferanten
Ct	Transportkostensatz
Cu_A	Kostensatz je Bestellung und Umschlag eines Transportloses beim Abnehmer
Cu_L	Kostensatz je Umschlag eines Transportloses beim Lieferanten
Cut	zusammengefaßter Kostensatz für Bestellung, Umschlag und Beförderung eines Transportloses
NB	Substitutionsfaktor
NL	Substitutionsfaktor
P	Produktionsgeschwindigkeit des Lieferanten
R	zu deckender Gesamtbedarf im Planungszeitraum
T	Planungszeitraum
V	Verbrauchs- oder Weiterverarbeitungsgeschwindigkeit des Abnehmers

1 Problemstellung und Aufbau des Arbeitsberichts

Der amerikanische Historiker CHANDLER unterschied bereits Anfang der 60er Jahre des vergangenen Jahrhunderts zwei Phasen, die von expandierenden Unternehmen durchlaufen werden:¹ Während in der ersten Phase Strategien der Produktionsausweitung (Marktdurchdringung, Marktentwicklung) und der vertikalen Integration mit verrichtungsorientierten unternehmensinternen Strukturen (*Funktionalorganisation*) einhergehen, ist die zweite Phase durch Diversifikationsstrategien und objektorientierte unternehmensinterne Strukturen (*Divisionalorganisation*) gekennzeichnet. Seit Ende der 80er Jahre des 20. Jahrhunderts tritt verstärkt eine dritte Phase in den Vordergrund, die in Abkehr von vertikaler Integration und Diversifikation die Strategie der Konzentration auf das Kerngeschäft in Verbindung mit prozeßorientierten unternehmensübergreifenden Strukturen (*Netzwerkorganisation*) umfaßt.²

Unternehmen mit reduzierter Fertigungstiefe, die sich auf ihre Kernkompetenzen konzentrieren, sind gezwungen, verstärkt miteinander zu kooperieren, um gemeinschaftlich konkurrenzfähige Sach- und/oder Dienstleistungen für den Endverbraucher produzieren zu können. Aus diesem Grunde kommt es zu vertikalen strategischen Allianzen in Form von *Wertschöpfungspartnerschaften*³ zwischen Unternehmen, „die ihre Aktivitäten auf bestimmte Stufen der Wertkette konzentrieren und entlang der Wertkette kooperieren“⁴. Dabei ist es nicht ungewöhnlich, daß ein Unternehmen mit mehreren Partnern zusammenarbeitet und somit Teil mehrerer Wertketten ist. Folglich korrespondiert die strategische Notwendigkeit einer kundenorientierten *Kopplung der Kernkompetenzen* verschiedener Unternehmen mit einer organisatorischen *Verknüpfung der Strukturen und Prozesse* dieser Unternehmen zu einer Netzwerkorganisation.⁵

Diese strategisch-organisatorische Entwicklung gipfelt in einem neuen Managementkonzept, das gegenwärtig unter dem Schlagwort „*Supply Chain Management*“ (SCM) oder „*Supply Network Management*“ (SNM) intensiv in Theorie und Praxis diskutiert wird.⁶ Hierunter ist die Analyse, Planung, Steuerung und Kontrolle der Geschäftsprozesse innerhalb eines Netzwerks von Unternehmen zu verstehen, die ihre Aktivitäten auf bestimmte Glieder der Wertschöpfungskette konzentrieren und entlang dieser an der Entwicklung, Produktion und Verwertung von Sach- und/oder Dienstleistungen zielorientiert und partnerschaftlich zusammenarbeiten.⁷

1 Vgl. im folgenden CHANDLER (1962), (1969), S. 383 ff.

2 Vgl. BÜHNER (1989), S. 225 und SYDOW (1992), S. 3 f.

3 Zu Wertschöpfungspartnerschaften vgl. bspw. ROLLBERG (1996).

4 SYDOW (1992), S. 64.

5 Vgl. auch SCHINZER (1999), S. 857 f.

6 Vgl. bspw. STADTLER (2000), WERNER (2000), CORSTEN/GÖSSINGER (2001), KEUPER (2001), S. 164 ff. und BUSCHER (2003a). Siehe auch Abbildung 1.2 in KNOLMAYER/MERTENS/ZEIER (2000), S. 3, in der die „Supply Chain“ als Ausschnitt eines „Supply Network“ dargestellt wird.

7 Diese Arbeitsdefinition ergibt sich als eine Kombination aus zum Teil wörtlich übernommenen Passagen der Wertschöpfungspartnerschaftsdefinition von SYDOW (1992), S. 64, der SCM-Definition von HAHN (2002), S. 1064 und der SNM-Definition von BUSCHER (2003a), S. 57 f.

Aus Wertschöpfungspartnerschaften bestehende Netzwerkorganisationen im Sinne des SCM verlangen also nach einer *integrierten Unternehmensverbundplanung*, während man sich in unverbundenen Funktional- oder Divisionalorganisationen noch auf eine *integrierte Unternehmensplanung*¹ konzentrieren kann. Unternehmens- und Unternehmensverbundplanung unterscheiden sich letztlich „nur“ durch die Zahl zu berücksichtigender Daten, Variablen und Restriktionen, weil der Unterschied zwischen einer mehrstufigen Produktion in einem Einzelunternehmen und einer auf mehrere rechtlich selbständige Unternehmen aufgeteilten mehrstufigen Produktion eher bedeutungslos ist. Insofern kann es auch nicht verwundern, daß die eigentlich für das SCM entwickelten *Advanced Planning and Scheduling Systems* (APS-Systeme)² häufig nur zur integrierten Planung innerbetrieblicher Logistikketten eingesetzt werden, bei der die Koordination der Aktivitäten mehrerer Werke ein und desselben Unternehmens im Mittelpunkt des Interesses steht.³

Vor dem Hintergrund der aufgezeigten Entwicklungen soll im vorliegenden Arbeitsbericht mit der kurzfristigen Abstimmung der Produktionsprozesse von zwei Wertschöpfungspartnern nur ein *kleiner Ausschnitt des Gesamtplanungsproblems* thematisiert werden. Konkret geht es um die simultane Ermittlung der Produktionslosgröße eines Lieferanten und der mit der Transportlosgröße identischen Bestellmenge des weiterverarbeitenden Abnehmers.

Die zahlreichen in der Literatur zu findenden *kostentheoretischen Ansätze*⁴ zur Lösung derartiger Probleme basieren allesamt auf dem klassischen Grundmodell der optimalen Auftragsgröße⁵, das von HARRIS entwickelt und von STEFANIC-ALLMAYER und ANDLER in Deutschland verbreitet wurde.⁶ Beispielhaft zu nennen sind hier vor allem die ersten Ansätze von GOYAL und BANERJEE sowie Modelle jüngerer Datums von PANICHI, TOPOROWSKI, BOGASCHESKY/MÜLLER/ROLLBERG und BUSCHER.⁷

Im folgenden werden weder die Unterschiede zwischen den einzelnen Ansätzen herausgearbeitet, noch wird die umfangreiche Modellgruppe durch eine weitere Variante ergänzt. Der Schwerpunkt des Arbeitsberichts liegt vielmehr in der Präsentation eines neuartigen, auf Ellipsengleichungen beruhenden *Algorithmus* zur Auswertung entsprechender Modelle – oder genauer zur Ermittlung einer ganzzahligen Optimallösung des Problems über eine effiziente Suchfeldeingrenzung.

1 Zur integrierten Unternehmensplanung vgl. bspw. SCHWEIM (1969), KOCH (1982) und ROLLBERG (2001).

2 Zu APS-Systemen vgl. bspw. TEMPELMEIER (1999), GÜNTHER/TEMPELMEIER (2000), S. 339 ff., STADTLER/KILGER (2000), S. 73 ff. (Teil II), KNOLMAYER/MERTENS/ZEIER (2000), S. 105 ff., CORSTEN/GÖSSINGER (2001), S. 151 ff., KRÜGER/STEVEN (2002) und ROLLBERG (2002), S. 147 ff.

3 Vgl. KNOLMAYER/MERTENS/ZEIER (2000), S. 187.

4 Zu den im folgenden nicht thematisierten zahlungsstromorientierten Ansätzen vgl. HOFMANN (1995), S. 19 ff. und die dort zitierte Literatur.

5 Die Auftragsgröße sei im folgenden als Oberbegriff für die Losgröße bei Eigenfertigung und die Bestellmenge bei Fremdbezug zu verstehen; vgl. ADAM (1998), S. 475.

6 Vgl. HARRIS (1913), (1915), STEFANIC-ALLMAYER (1927) und ANDLER (1929) sowie ferner TAFT (1918) und VON DOBBELER (1920).

7 Vgl. GOYAL (1976), BANERJEE (1986), PANICHI (1996), TOPOROWSKI (1999), BOGASCHESKY/MÜLLER/ROLLBERG (1999) und BUSCHER (2003b).

Zunächst wird das Planungsproblem im folgenden *Kapitel 2* genauer beschrieben. *Kapitel 3* ist dann der unter Nebenbedingungen zu minimierenden Kostenfunktion des betrachteten Kunden-Lieferanten-Segments gewidmet. Getrennt nach den drei Subsystemen des Segments „Lieferant“, „Abnehmer“, „Umschlag und Transport“ werden alle für die Modellbildung relevanten Details erläutert und subsystemspezifische Kostenfunktionen entwickelt. Die abschließend aufgestellte segmentspezifische Gesamtkostenfunktion entspricht letztlich dem auf kurzfristige Fragestellungen reduzierten Modell von BOGASCHEWSKY/MÜLLER/ROLLBERG, ist jedoch mit Blick auf die zum Einsatz gelangenden Variablen etwas zweckmäßiger konstruiert. *Kapitel 4* dient schließlich der Herleitung eines zweistufigen Verfahrens, mit dem der Lösungsraum so lange sukzessiv eingeschränkt wird, bis nur noch das gesuchte Kostenminimum darin enthalten ist. In der ersten Stufe gelangt ein zwar einfaches Ellipsenverfahren zur Anwendung, das aber das gesuchte Kostenminimum verfehlen kann. Deshalb wird in der zweiten Stufe das Ergebnis der ersten mit dem sogenannten korrigierten Ellipsenverfahren überprüft und die gefundene Lösung entweder bestätigt oder durch das tatsächliche Kostenminimum ersetzt. Die Funktionsweise des zweistufigen Ellipsenverfahrens wird abschließend an Hand eines Zahlenbeispiels verdeutlicht, bevor in *Kapitel 5* Modell und Algorithmus einer kritischen Würdigung unterzogen werden.

2 Konkretisierung der Planungssituation

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist eine auf mehrere Wertschöpfungspartner aufgeteilte mehrstufige Produktion eines bestimmten Erzeugnisses. In jeder Stufe werden Inputgüter zu Outputgütern transformiert, wobei der Output einer Stufe mit dem Input der Folgestufe identisch ist und der Output der letzten Stufe dem Endprodukt entspricht.¹ Aus dieser Wertschöpfungskette wird ein beliebiges *Kunden-Lieferanten-Segment* zur genaueren Betrachtung herausgelöst.² Der Zulieferer dieses Segments produziert ein Zwischenerzeugnis, das der Abnehmer weiterverarbeitet. Dabei ist es unerheblich, ob der Abnehmer ein marktfähiges Finalprodukt für den Endkunden erzeugt oder seinerseits lediglich Vorlieferant ist. Ziel des gemeinsamen Produktionsengagements ist die Maximierung des Gesamtgewinns.

Innerhalb eines definierten Planungszeitraums muß der weiterverarbeitende Abnehmer einen mit einer konstanten Rate je Zeiteinheit auftretenden Bedarf an (Zwischen-)Produkten decken, wobei Fehl-, Verzugs- und Lagermengen unzulässig sind (absatzsynchrone Produktion). Es ist von einem fixen Stückverkaufspreis der Güter des Abnehmers auszugehen, womit der Erlös des Kunden-Lieferanten-Segments innerhalb des Planungszeitraums konstant und entscheidungsirrelevant ist. Mithin sind die Ziele Gewinnmaximierung und *Kostenminimierung* äquivalent. Da sowohl beim Zulieferer als auch beim Abnehmer fixe Produktionsstückkosten unterstellt werden, sind im folgenden ausschließlich die *Logistikkosten* (Bestell-, Rüst-, Lager-, Umschlag- und Transportkosten) des Segments entscheidungsrelevant.

Damit der weiterverarbeitende Abnehmer in der Lage ist, absatzsynchron zu produzieren, muß er zuverlässig von seinem Zulieferer mit Vorprodukten versorgt werden. Also sind auch innerhalb des Kunden-Lieferanten-Segments Fehl- und Verzugs Mengen nicht erlaubt. Die vom Abnehmer bestellten und vom Zulieferer in gleichen zeitlichen Abständen und konstanten *Transportlosen* bereitgestellten Zwischenprodukte liegen nach der Anlieferung bis zur Weiterverarbeitung im Wareneingangslager des Kunden. Weder darf die *Bestellmenge* des Abnehmers in mehrere Transportlose aufgespalten noch dürfen mehrerer Bestellungen zu einem Transportlos zusammengefaßt werden. Ob der Transport der Zwischenprodukte vom Lieferanten, vom Abnehmer oder von einem externen Transporteur als Intermediär übernommen wird, ist unter diesen Bedingungen belanglos, solange die damit verbundenen Kosten im aufzustellenden Modell Berücksichtigung finden. Die Produktion der Zwischenerzeugnisse erfolgt in stets gleich großen *Fertigungslosen*, wobei bereits gefertigte, aber noch nicht abtransportierte Zwischenprodukte beim Lieferanten im Warenausgangslager liegen. Die Versorgung des Lieferanten mit benötigten Rohstoffen und Vorprodukten erfolgt produktions-synchron und wird damit aus der weiteren Betrachtung ausgeklammert. Produktions-, Lager- und Transportkapazitäten sind in ausreichendem Maße vorhanden.

Als *Planungsaufgabe* ergibt sich die Ermittlung der mit der Transportlosgröße identischen Bestellmenge des Abnehmers und der gegebenenfalls von ihr abweichenden Produktionslosgröße des Lieferanten, die die entscheidungsrelevanten Logistikkosten minimieren. Der Aus-

1 Vgl. CORSTEN/GÖSSINGER (2001), S. 203.

2 Vgl. im folgenden auch BOGASCHEWSKY/MÜLLER/ROLLBERG (1999), S. 136.

tausch sämtlicher planungsrelevanten Daten ist sichergestellt, weil es sich bei den betrachteten Unternehmen um Wertschöpfungspartner handelt.

3 Modellbildung

Zur Aufstellung eines kostentheoretischen Modells müssen die entscheidungsrelevanten Logistikkosten im einzelnen herausgearbeitet werden. Hierzu wird die Prozeßkette vom Lieferanten zum Abnehmer in einzelne Subsysteme untergliedert. Als Subsysteme lassen sich (a) der Lieferant mit seiner Produktionsleistung und seinem Warenausgangslager, (b) der Abnehmer mit seinem Wareneingangslager und seiner Weiterverarbeitungsleistung und (c) der Transportprozeß mit seinen Schnittstellen zum Lieferanten und zum Abnehmer einschließlich der zugehörigen Umschlagsleistungen abgrenzen. Sowohl das Wareneingangslager des Zulieferers als auch das Warenausgangslager des Abnehmers werden nicht berücksichtigt, weil annahmegemäß die Belieferung des Lieferanten produktionssynchron und die Fertigung des Abnehmers absatzsynchron erfolgen soll, sich also weder ein Wareneingangslager beim Lieferanten noch ein Warenausgangslager beim Abnehmer aufbaut.

3.1 Subsystem Lieferant

Der Lieferant fertigt losweise die Zwischenprodukte mit konstanter Produktionsgeschwindigkeit P und lagert sie bis zur Lieferung an den Abnehmer in seinem Warenausgangslager. Damit der Lieferant stets lieferfähig ist, darf seine Produktionsgeschwindigkeit P nicht kleiner als die Weiterverarbeitungsgeschwindigkeit V des Abnehmers sein; mithin hat $P \geq V$ zu gelten. Um eine auch in dieser Situation noch mögliche temporäre Lieferunfähigkeit durch Leerlaufen des Warenausgangslagers beim Lieferanten zu vermeiden, wird unterstellt, daß die Produktionsmenge y_L eines Fertigungsloses ein ganzzahliges Vielfaches q der Bestell- und mit ihr identischen Transportmenge y_B darstellt. Diese Voraussetzung hat auch Auswirkungen auf den Zusammenhang zwischen der Anzahl aufzulegender Produktionslose n_L und der Anzahl auszulösender Bestellungen n_B im Planungszeitraum. Während aus einem Produktionslos genau q Bestellungen und Transportlose resultieren, ergeben sich aus n_L Produktionslosen $q \cdot n_L$ Bestellungen, es gilt also $n_B = q \cdot n_L$. Zudem sollten bei Betrachtung eines endlichen Planungszeitraums auch die Bestell- und Losauflagehäufigkeiten ganzzahlig sein. Nur alle geforderten Ganzzahligkeitsbedingungen gemeinsam führen zu zyklischen Bestandsverläufen im Warenausgangslager des Lieferanten und in jedem Planungszeitraum zu vollständigen Zyklen, was einer problemlosen Berechnung des durchschnittlichen Lagerbestands dienlich ist. Jeder Zyklus umfaßt dabei die Fertigung eines kompletten Produktionsloses durch den Lieferanten und den vollständigen Abtransport der entsprechenden Gütermengen zum Abnehmer in mindestens einem, wenn nicht gar mehreren Transportlosen.

In der dargestellten Situation muß der Lieferant entscheiden, wie viele Mengeneinheiten des Zwischenprodukts er in einem Fertigungslos produzieren will. Die Auflage eines Loses führt zu losauflagefixen Rüstkosten C_r und durch die sich anschließende Lagerung der Zwischenprodukte zu Lagerkosten, determiniert durch den Lagerkostensatz je Mengen- und Zeiteinheit C_l sowie den durchschnittlichen Lagerbestand und die Dauer eines Losauflagezyklus. Die reinen Produktionskosten seien auf Grund mengenunabhängiger Stückkosten bei gegebenem

Gesamtbedarf im Planungszeitraum entscheidungsirrelevant. Durch die gegenläufige Entwicklung der Rüst- und Lagerkosten bei steigender Losgröße und damit sinkender Auflagehäufigkeit ergibt sich beim Lieferanten der bekannte klassische Kostenkonflikt. Insofern ist die modellhafte Abbildung der Situation des Lieferanten fast identisch mit dem klassischen Modell der optimalen Losgröße. Der einzige Unterschied zum klassischen Modell besteht im Lagerabgang, der im hier vorliegenden Fall nicht kontinuierlich, sondern in gleichmäßig über den Planungszeitraum verteilten diskreten Sprüngen erfolgt. Bei der Herleitung der Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten des Lieferanten ist dies zu berücksichtigen und darüber hinaus zwischen geschlossener und offener Fertigung zu differenzieren.

Während es für die formale Ermittlung der Rüstkosten irrelevant ist, ob offen oder geschlossen gefertigt wird, ist diese Frage für die resultierenden Lagerkosten von entscheidender Bedeutung, da sich durch die Produktionsweise ganz unterschiedliche Lagerbestandsverläufe und damit durchschnittliche Lagerbestände \bar{x} über den Planungszeitraum ergeben. Bei geschlossener Produktion muß der Lieferant sein Fertigungslos zunächst vollständig abgearbeitet haben, bevor er Mengeneinheiten daraus zum Abnehmer transportieren kann. Im Gegensatz dazu steht eine produzierte Mengeneinheit bei offener Produktion sofort zum Abtransport bereit, auch wenn das zugehörige Los noch nicht komplett fertiggestellt wurde.

Mit Hilfe der Lagerbestandsveränderungen läßt sich die durchschnittlich während des gesamten Planungszeitraums T beim Lieferanten gelagerte Menge \bar{x} ermitteln, woraus die gesuchten Lagerkosten berechnet werden können. Wegen der oben erwähnten Ganzzahligkeitsbedingungen reicht es aus, zur Bestimmung des durchschnittlichen Lagerbestands \bar{x} im Planungszeitraum T nur einen Produktionslosauflagezyklus zu betrachten und den zugehörigen durchschnittlichen Lagerbestand \bar{x}_{AZ} herzuleiten, der für alle n_L Zyklen des Planungszeitraums T gilt. Somit wird über den gesamten Planungszeitraum T hinweg die Gütermenge $\bar{x} = \bar{x}_{AZ}$ durchschnittlich beim Lieferanten gelagert.

Das allgemeine Vorgehen zur Ermittlung des durchschnittlichen Lagerbestands beim Lieferanten innerhalb eines Auflagezyklus besteht darin, die über die Auflagezykluszeit t_{AZ} kumulierten (diskreter Fall) bzw. integrierten (stetiger Fall) Lagerzu- und -abgänge zu saldieren und diese Differenz anschließend durch die Auflagezykluszeit zu dividieren.¹

Innerhalb des Zeitraums eines Auflagezyklus kann die Zeit der Produktionsloserstellung von der Zeit der Lieferung des Produktionsloses (eventuell aufgeteilt in mehrere Transportlose) an den Abnehmer abgegrenzt werden. Beide Zeiträume können sich auch überschneiden oder in ihrer Summe die Auflagezykluszeit nicht ganz ausfüllen, bspw. wenn bereits das gesamte Produktionslos an den Abnehmer geliefert wurde, er aber noch weiterverarbeitet und die Vorlaufproduktion beim Lieferanten noch nicht beginnen muß. In der Zeit t_p wird beim Lieferanten die Menge y_L eines Produktionsloses hergestellt, und in der Zeit t_w erfolgt die Weiterleitung der Menge y_L an den Abnehmer. Zu beachten ist, daß die Menge y_L zwar innerhalb der Auflagezykluszeit $t_{AZ} = q \cdot t_{LZ}$ (t_{LZ} = Lieferzykluszeit) beim Abnehmer weiterverarbeitet wird, aber die Belieferung an den Abnehmer innerhalb des Zeitraums $t_w = (q - 1) \cdot t_{LZ} = t_{AZ} - t_{LZ}$ erfolgt!

¹ Die Herleitung der durchschnittlichen Lagerbestände bei offener und geschlossener Produktion erfolgt analog zum Vorgehen von BOGASCHEWSKY/MÜLLER/ROLLBERG (1997), S. 39 ff. und PANICHI (1996), S. 61 ff., allerdings mathematisch exakt auf der Grundlage der Integralrechnung.

Ermittlung des gesamten kumulierten Lagerzugangs L_{Zu}^{gesch} für einen Losauflagezyklus bei geschlossener Produktion durch Integration des Lagerzugangs über die Zeit:

$$\begin{aligned} \text{Betrachtung des Zeitraums } t_P: \quad L_{Zu}^{t_P} &= \int_0^{t_P} P \cdot t \, dt = \frac{1}{2} \cdot P \cdot t^2 \Big|_0^{t_P} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot (t_P^2 - 0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot P \cdot t_P^2 = \frac{1}{2} \cdot y_L \cdot t_P \end{aligned}$$

$$\text{Betrachtung des Zeitraums } t_W: \quad L_{Zu}^{t_W} = \int_{t_{LZ}}^{t_{AZ}} y_L \, dt = y_L \cdot t \Big|_{t_{LZ}}^{t_{AZ}} = y_L \cdot (t_{AZ} - t_{LZ})$$

$$\text{gesamter kumulierter Lagerzugang: } L_{Zu}^{\text{gesch}} = \frac{1}{2} \cdot y_L \cdot t_P + y_L \cdot (t_{AZ} - t_{LZ})$$

Ermittlung des gesamten kumulierten Lagerzugangs L_{Zu}^{offen} für einen Losauflagezyklus bei offener Produktion durch Integration des Lagerzugangs über die Zeit:

$$\begin{aligned} \text{Betrachtung des Zeitraums } t_P: \quad L_{Zu}^{t_P} &= \int_0^{t_P} P \cdot t \, dt = \frac{1}{2} \cdot P \cdot t^2 \Big|_0^{t_P} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot (t_P^2 - 0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot y_L \cdot t_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Betrachtung des Zeitraums } t_W: \quad L_{Zu}^{t_W} &= \int_{t_{LZ}}^{t_{AZ}} y_L \, dt - \int_{\frac{y_B}{P}}^{t_P} y_L \, dt \\ &= y_L \cdot t \Big|_{t_{LZ}}^{t_{AZ}} - y_L \cdot t \Big|_{\frac{y_B}{P}}^{t_P} \\ &= y_L \cdot \left(t_{AZ} - t_{LZ} - \left(t_P - \frac{y_B}{P} \right) \right) \end{aligned}$$

Durch die Entnahme und Versendung von Produkten als Transportlose noch während der Auflage des Produktionsloses überschneiden sich die Zeiträume t_P und t_W . Dadurch wird der Lageraufbau (und damit auch der kumulierte Lageraufbau) in dem Abschnitt des Zeitraums t_W , in dem noch das Produktionslos erstellt wird, bereits durch den oben betrachteten Zeitraum t_P beschrieben. Somit muß vom Integral der Produktionslosmenge y_L über den Zeitraum $t_W = t_{AZ} - t_{LZ}$ das Integral der Produktionslosmenge y_L über diesen Überschneidungszeitraum abgezogen werden. Um den Überschneidungszeitraum zu bestimmen, in welchem das betrachtete Produktionslos noch produziert, aber auch schon teilweise zum Abnehmer weitertransportiert wird, muß man sich veranschaulichen, wann der erste Transport zum Abnehmer erfolgt. Dies geschieht genau dann, wenn innerhalb des Produktionsloses die produzierte Menge genau der Menge y_B einer Bestellung entspricht. Da der Lieferant stets mit der Geschwindigkeit P produziert, wird in y_B / P Zeiteinheiten die Menge y_B vom Lieferant produziert.

gesamter kumulierter Lagerzugang: $L_{Zu}^{offen} = \frac{1}{2} \cdot y_L \cdot t_P + y_L \cdot \left(t_{AZ} - t_{LZ} - \left(t_P - \frac{y_B}{P} \right) \right)$

Ermittlung des gesamten kumulierten Lagerabgangs L_{Ab} für einen Losauflagezyklus (bei geschlossener und offener Produktion identisch):

Während eines Auflagezyklus erfolgt die Entnahme von Transportlosen der Menge y_B in Abständen von t_{LZ} Zeiteinheiten aus dem Lieferantenlager genau so oft, bis die Summe aller Transport- bzw. Bestellmengen gerade das Fertigungslos y_L ergibt (nach Voraussetzung stehen die Produktionsmenge eines Fertigungsloses und die Bestellmenge in dem ganzzahligen Verhältnis q zueinander). Dadurch, daß alle Transportlose stets gleich groß sind und jeweils genau die Menge einer Bestellung umfassen, wird der Auflagezyklus in q zeitlich gleiche Unterabschnitte (der Lieferzeit t_{LZ}) zerlegt. Die erste Entnahme aus dem Fertigungslager erfolgt innerhalb eines Auflagezyklus nach t_{LZ} Zeiteinheiten und die letzte der q Entnahmen nach $q \cdot t_{LZ} = t_{AZ}$ Zeiteinheiten. Soll der Lagerabgang LA über die Auflagezykluszeit kumuliert erfaßt werden, müssen die q Lagerentnahmen einzeln über die Zeit von ihrer jeweiligen Entnahme an bis zur Auflagezykluszeit integriert und summiert werden:

$$\begin{aligned} L_{Ab} &= \int_0^{t_{AZ}} LA \, dt = \sum_{i=1}^q \left[\int_{t_{AZ} - ((i-1) \cdot t_{LZ})}^{t_{AZ}} y_B \, dt \right] = \sum_{i=1}^q \left[\int_{t_{LZ} \cdot (q - (i-1))}^{q \cdot t_{LZ}} y_B \, dt \right] = \sum_{i=1}^q \left(y_B \cdot t_{t_{LZ} \cdot (q-i+1)}^{q \cdot t_{LZ}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^q (q \cdot t_{LZ} \cdot y_B - q \cdot t_{LZ} \cdot y_B + (i-1) \cdot t_{LZ} \cdot y_B) = y_B \cdot t_{LZ} \cdot \sum_{i=1}^q (i-1) \\ &= y_B \cdot t_{LZ} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{2} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der hergeleiteten kumulierten Lagerzu- und -abgänge sowohl für die geschlossene als auch für die offene Produktionsweise kann die Berechnung des durchschnittlichen Lagerbestands für einen Auflagezyklus durch Subtraktion des kumulierten Lagerabgangs vom kumulierten Lagerzugang und anschließende Division der Differenz durch die Auflagezykluszeit erfolgen.

Ermittlung des durchschnittlichen Lagerbestands \bar{x}_{AZ}^{gesch} für einen Losauflagezyklus bei geschlossener Produktion:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{AZ}^{gesch} &= \frac{L_{Zu}^{gesch} - L_{Ab}}{t_{AZ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot y_L \cdot t_P + y_L \cdot (t_{AZ} - t_{LZ}) - y_B \cdot t_{LZ} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{2}}{t_{AZ}} \\ &= \frac{y_L \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{V \cdot t_{AZ}}{P} + t_{AZ} - \frac{t_{AZ}}{q} \right) - y_B \cdot \frac{t_{AZ}}{q} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{2}}{t_{AZ}} \\ &= q \cdot y_B \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{V}{P} + 1 - \frac{1}{q} \right) - y_B \cdot \frac{(q-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y_B \cdot \left(\frac{q}{2} \cdot \frac{V}{P} + q - 1 - \frac{q-1}{2} \right) = \frac{R}{n_B} \cdot \left(\frac{q}{2} \cdot \left(\frac{V}{P} + 1 \right) - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{q}{n_B} \cdot \left(\frac{V}{P} + 1 \right) - \frac{1}{n_B} \right) = \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_L} \cdot \left(1 + \frac{V}{P} \right) - \frac{1}{n_B} \right)
\end{aligned}$$

Ermittlung des durchschnittlichen Lagerbestands $\bar{x}_{AZ}^{\text{offen}}$ für einen Losauflagezyklus bei offener Produktion:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{AZ}^{\text{offen}} &= \frac{L_{Zu}^{\text{offen}} - L_{Ab}}{t_{AZ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot y_L \cdot t_P + y_L \cdot \left(t_{AZ} - t_{LZ} - \left(t_P - \frac{y_B}{P} \right) \right) - y_B \cdot t_{LZ} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{2}}{t_{AZ}} \\
&= \frac{y_L \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{V \cdot t_{AZ}}{P} + t_{AZ} - \frac{t_{AZ}}{q} - \frac{V \cdot t_{AZ}}{P} + \frac{y_L}{q \cdot P} \right) - y_B \cdot \frac{t_{AZ}}{q} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{2}}{t_{AZ}} \\
&= q \cdot y_B \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{V}{P} + 1 - \frac{1}{q} - \frac{V}{P} + \frac{y_L}{t_{AZ} \cdot q \cdot P} \right) - y_B \cdot \frac{(q-1)}{2} \\
&= y_B \cdot \left(-\frac{q}{2} \cdot \frac{V}{P} + q - 1 + \frac{V}{P} - \frac{q-1}{2} \right) = \frac{R}{n_B} \cdot \left(\frac{q}{2} \cdot \left(-\frac{V}{P} + 2 - 1 \right) - \frac{1}{2} + \frac{V}{P} \right) \\
&= R \cdot \left(\frac{q}{n_B \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{V}{P} \right) - \frac{1}{n_B} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{V}{P} \right) \right) = \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_L} \cdot \left(1 - \frac{V}{P} \right) - \frac{1}{n_B} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot V}{P} \right) \right)
\end{aligned}$$

Die durchschnittlichen Lagerbestände $\bar{x}_{AZ}^{\text{gesch}}$ und $\bar{x}_{AZ}^{\text{offen}}$ unterscheiden sich nur in den zu den Reziproken von n_L und n_B zugehörigen Faktoren. Wird der zu n_L^{-1} gehörige Faktor mit NL und der zu n_B^{-1} gehörige Faktor mit NB bezeichnet, läßt sich definieren:

$$NL := \begin{cases} 1 + \frac{V}{P} & \text{bei geschlossener Produktion} \\ 1 - \frac{V}{P} & \text{bei offener Produktion} \end{cases}$$

$$NB := \begin{cases} 1 & \text{bei geschlossener Produktion} \\ 1 - \frac{2 \cdot V}{P} & \text{bei offener Produktion} \end{cases}$$

Durch diese Definitionen ergibt sich als verallgemeinerter, unabhängig von der Produktionsweise gültiger durchschnittlicher Lagerbestand \bar{x}_{AZ} für einen Losauflagezyklus:

$$\bar{x}_{AZ} = \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_L} \cdot NL - \frac{1}{n_B} \cdot NB \right)$$

Wie bereits erläutert, entspricht der durchschnittliche Lagerbestand für einen Auflagezyklus dem durchschnittlichen Lagerbestand \bar{x} über den gesamten Planungszeitraum T. Dies kann auch mathematisch gezeigt werden:

Der Auflagezyklus wiederholt sich während des Betrachtungszeitraums (T/t_{AZ}) -mal. Daraus ergibt sich, daß der durchschnittliche Lagerbestand für einen Auflagezyklus (T/t_{AZ}) -mal summiert und anschließend durch die Anzahl der Summanden, also (T/t_{AZ}) -mal, dividiert werden muß, um den durchschnittlichen Lagerbestand im gesamten Betrachtungszeitraum zu berechnen.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{t_{AZ}} \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_L} \cdot NL - \frac{1}{n_B} \cdot NB \right)}{\frac{T}{t_{AZ}}} = \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_L} \cdot NL - \frac{1}{n_B} \cdot NB \right) = \bar{x}_{AZ}$$

Mit Hilfe des durchschnittlichen Lagerbestands während des Planungszeitraums läßt sich die Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten des Lieferanten bezogen auf Produktion (Rüstkosten) und Lagerung (Lagerhaltungskosten) in Abhängigkeit von Produktions- und Transportlosauflagehäufigkeit (= Bestellhäufigkeit) formulieren:

$$K_T^L(n_L, n_B) = Cr_L \cdot n_L + \bar{x} \cdot Cl_L \cdot T = Cr_L \cdot n_L + \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_L} \cdot NL - \frac{1}{n_B} \cdot NB \right) \cdot Cl_L \cdot T$$

Zu den im Subsystem Lieferant entstehenden Kosten zählen auch die durch die Abnehmerbestellung beim Lieferanten verursachten Umschlagkosten, die beispielsweise durch die Kommissionierung der Waren im Warenausgangslager entstehen. Wegen ihrer Strukturgleichheit mit den Umschlagkosten beim Abnehmer, die mit dem Transportloseingang in seinem Wareneingangslager verbunden sind, werden diese Kosten jedoch zusammengefaßt zum Subsystem Umschlag und Transport weiter unten in einem eigenen Unterkapitel thematisiert.

3.2 Subsystem Abnehmer

Der Abnehmer verarbeitet die Zwischenprodukte des Lieferanten mit konstanter und mit seinem Absatz synchronisierter Weiterverarbeitungsgeschwindigkeit V . Durch diese Synchronisation muß der Abnehmer ohne Unterbrechung Produkte fertigen, wenn die gesamte Nachfrage im Planungszeitraum befriedigt werden soll. Damit stellt sich dem Abnehmer das Problem der Produktionslosgrößenfestlegung nicht. Aus der Forderung, keine Nachfrage unbefriedigt zu lassen, ergibt sich wie schon zuvor für den Zulieferer die vom Abnehmer im Planungszeitraum zu fertigende Produktionsmenge. Bei mengenunabhängigen Stückkosten sind die reinen Produktionskosten somit auch für den Abnehmer entscheidungsirrelevant.

Da die Zwischenprodukte in den Zeitabständen t_{LZ} jeweils in Höhe eines Transportloses mit einer quasi unendlichen Lagerzugangsgeschwindigkeit im Wareneingangslager des Abnehmers eintreffen und der Lagerabgang (= Weiterverarbeitungsgeschwindigkeit) kontinuierlich erfolgt, ergibt sich für den Abnehmer das Problem der Bestimmung der kostenminimalen Bestellmenge y_B (= Transportlosgröße). Je größer die Bestellmenge ist, desto mehr wird vorübergehend im Wareneingangslager zwischengelagert. Ist diese Warenmenge verbraucht (ver-

einfachend wird angenommen, daß im Lager kein Sicherheitsbestand gehalten wird), trifft die neue Lieferung ein. Damit liegt während eines Bestellzyklus durchschnittlich die halbe Bestellmenge auf Lager, was Lagerkosten verursacht. Da sich innerhalb des Planungszeitraums der Bestellzyklus permanent wiederholt, wird auch während dieses Zeitraums durchschnittlich $y_B/2$ gelagert. Dadurch, daß mit zunehmender Bestellmenge der durchschnittliche Lagerbestand ansteigt, erhöhen sich auch die Lagerkosten. Minimiere der Abnehmer nur diese Kosten, strebte er eine produktionssynchrone Zulieferung an (Just-in-Time-Konzept)¹, denn dann entstünden ihm keine Lagerkosten.

Allerdings sind auch bestellfixe Kosten und Warenumsschlagkosten des Abnehmers nicht zu vernachlässigen, die mit zunehmender Transportfrequenz steigen und damit einer produktionssynchronen Belieferung tendenziell entgegenwirken. Diese von der Bestellhäufigkeit abhängigen Kosten sollen aber erst in Unterkapitel 3.3 zum Subsystem Umschlag und Transport gemeinsam mit den Transportkosten näher beleuchtet werden, um der Übersichtlichkeit halber einen „aggregierten Bestell-, Umschlag- und Transportkostensatz“ formulieren zu können.

Mithin sind bei Betrachtung des Subsystems Abnehmer zunächst nur die Wareneingangslagerkosten von Interesse. Sie ergeben sich als Produkt aus Lagerkostensatz Cl_A pro Mengen- und Zeiteinheit, durchschnittlichem Lagerbestand $y_B/2$ und Lagerdauer (= Planungszeitraum T):

$$K_T^A(y_B) = \frac{y_B}{2} \cdot Cl_A \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad K_T^A(n_B) = \frac{R}{2} \cdot Cl_A \cdot T \quad (\text{da } R = y_B \cdot n_B)$$

Der aus der klassischen Bestellmengenplanung bekannte Konflikt zwischen Lagerkosten und bestellhäufigkeitsabhängigen Kosten ergibt sich erst im Zusammenspiel mit den anderen Subsystemen des Zulieferer-Abnehmer-Segments.

3.3 Subsystem Umschlag und Transport

In periodischen Abständen von t_{LZ} Zeiteinheiten wird dem Warenausgangslager des Lieferanten ein Transportlos von y_B Mengeneinheiten mittels Umschlagleistung entnommen und zum Abnehmer transportiert. Wie der Transport mit welcher Transportvariante (Transportmittel und Transportroute) konkret erfolgt, soll nicht Gegenstand des Modells sein. Weiterhin wird angenommen, daß die ausgewählte Transportalternative unabhängig von der Transportlosgröße ist, daß es also keine Transportmengenschwellenwerte gibt, bei deren Erreichen ein Wechsel des eingesetzten Transportmittels erforderlich wäre. Mit Eintreffen der Zwischenprodukte beim Abnehmer steigt wiederum durch eine Umschlagleistung die in seinem Wareneingangslager befindliche Warenmenge sprunghaft an.

Obwohl auch der Transport der Zwischenprodukte eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt und der Transportprozeß somit als mobiles Lager mit spezifischem Lagerhaltungskostensatz ver-

¹ Zu produktionssynchronen Zulieferungskonzepten vgl. bspw. BOGASCHEWSKY/ROLLBERG (2002).

standen werden könnte, ist eine Berücksichtigung im Modell nicht notwendig, da letztlich jedes Zwischenprodukt den Transportprozeß zwischen Lieferant und Abnehmer durchlaufen muß und die Transportzeit nicht variierbar ist. Damit sind aber die anfallenden Lagerhaltungskosten während des Transports nicht beeinflussbar und somit auch nicht entscheidungsrelevant.

Die mit der Bestellung durch den Abnehmer, mit dem Umschlag des Transportloses beim Lieferanten und beim Abnehmer sowie mit dem Transport der Bestellmenge verbundenen Kosten können danach unterschieden werden, ob sie unabhängig von der zu transportierenden Menge (losgrößenfixe Kosten) oder pro Mengeneinheit anfallen (losgrößenvariable Kosten).

Umschlag- und Transportstückkosten seien genauso wie die Produktionsstückkosten mengenunabhängig. Da zudem die Transportmenge im Planungszeitraum durch den vorgegebenen Gesamtbedarf determiniert ist, sind auch die losgrößenvariablen Kosten des Umschlags und Transports entscheidungsirrelevant.

Die losgrößenfixen Kosten K_T^{UT} im Planungszeitraum T entsprechen dem Produkt aus der Bestell- oder Transporthäufigkeit n_B und der Summe der Kostensätze für den Transport C_t , für den Umschlag beim Lieferanten Cu_L sowie für die Bestellung und den Umschlag beim Abnehmer Cu_A :

$$K_T^{UT}(n_B) = Cu_L \cdot n_B + Cu_A \cdot n_B + C_t \cdot n_B \Rightarrow K_T^{UT}(n_B) = C_{ut} \cdot n_B \quad (C_{ut} := Cu_L + Cu_A + C_t)$$

3.4 Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten des Zulieferer-Abnehmer-Segments

Die einzelnen Subsysteme Lieferant, Abnehmer sowie Umschlag und Transport bilden in ihrer Gesamtheit modellhaft die betrachtete Kunden-Lieferanten-Beziehung ab. Um die kostenminimale Dimensionierung der Fertigungs- und Transportlose bzw. die kostenminimalen Produktionslosaufgabe- und Bestellhäufigkeiten zu bestimmen, müssen alle entscheidungsrelevanten Kosten simultan berücksichtigt werden. Hierzu sind die relevanten Kostenfunktionen der einzelnen Subsysteme durch Addition zu einer Gesamtkostenfunktion zu aggregieren. Die Herleitung der Gesamtkostenfunktion erfolgt in Abhängigkeit von den Produktionslosaufgabe- und Bestellhäufigkeiten, weil sich die einzuhaltenden Ganzzahligkeitsbedingungen im Modell originär auf jene und ihre Abhängigkeit voneinander beziehen. Als Funktion der zu minimierenden entscheidungsrelevanten Kosten im Planungszeitraum ergibt sich:¹

¹ Auf Grund der Äquivalenz des betrachteten Entscheidungsproblems entspricht die hergeleitete Kostenfunktion (bei offener Produktion) letztlich der Gesamtkostenfunktion von MÜLLER (2000), S. 318 und damit dem auf kurzfristige Fragestellungen reduzierten Modell von BOGASCHESKY/MÜLLER/ROLLBERG (1999), S. 142. Jedoch wird in diesen Modellen die Produktionslosaufgabehäufigkeit bzw. die Bestellhäufigkeit durch den Quotienten aus Bestell- und Losaufgabehäufigkeit substituiert, wodurch das Problem unnötig verkompliziert wird und die Separabilität der Variablen verlorengeht.

$$K_T(n_L, n_B) = C_{rL} \cdot n_L + \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_L} \cdot NL - \frac{1}{n_B} \cdot NB \right) \cdot Cl_L \cdot T + \frac{R}{2 \cdot n_B} \cdot Cl_A \cdot T + Cut \cdot n_B \rightarrow \min!$$

$$K_T(n_L, n_B) = C_{rL} \cdot n_L + \frac{R \cdot T}{2 \cdot n_L} \cdot NL \cdot Cl_L + \frac{R \cdot T}{2 \cdot n_B} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) + Cut \cdot n_B \rightarrow \min!$$

unter den Nebenbedingungen:

$$n_B = q \cdot n_L \text{ und}$$

n_B, n_L, q sind positive ganze Zahlen.

4 Lösungsalgorithmus zur Ermittlung der kostenminimalen Losauflage- und Bestellhäufigkeit unter Ganzzahligkeitsbedingungen

4.1 Kostenminimum unter Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsbedingungen

Um das Minimum der hergeleiteten Kostenfunktion in Abhängigkeit von Losauflage- und Transporthäufigkeit unter Berücksichtigung der Restriktionen zu ermitteln, sollte ein mathematisches Optimierungsverfahren unter Nebenbedingungen angewandt werden. Ein in diesem Sinne klassischer Algorithmus ist das LAGRANGE-Verfahren. Für diesen Algorithmus ist es jedoch unerlässlich, daß die Nebenbedingungen in Gleichungsform vorliegen. Im hier betrachteten Fall bestehen die Nebenbedingungen jedoch hauptsächlich aus restringierenden Vorschriften zum Definitionsbereich der Entscheidungsvariablen, die nur diskrete Werte annehmen dürfen. Derartige Nebenbedingungen sind nicht in Gleichungsform abbildbar, womit das LAGRANGE-Verfahren als Lösungsweg ausscheidet. Auch andere bekannte Optimierungsalgorithmen unter Nebenbedingungen, wie Gleichsetzungs- oder Substitutionsverfahren, können, bedingt durch die spezifische Struktur der Nebenbedingungen, nicht eingesetzt werden.

Deshalb sollen bei der Bestimmung des Kostenminimums die das Problem stark verkomplizierenden Nebenbedingungen in einem ersten Berechnungsschritt ignoriert und die kostenminimalen Produktionslosauflage- und Transporthäufigkeiten durch einfache partielle Differentiation als reelle Zahlenwerte bestimmt werden. Nur in einem eher unwahrscheinlichen Ausnahmefall wird die so gefundene Lösung ganzzahlig und damit zulässig sein. Im Regelfall wird sich eine unzulässige Lösung ergeben, die in einem zweiten Schritt mit Hilfe eines noch zu entwickelnden Algorithmus in eine alle Ganzzahligkeitsbedingungen einhaltende und damit zulässige kostenminimale Lösung zu überführen ist. Da durch die einzuhaltenden Restriktionen Freiheitsgrade bei der Lösungsfindung verlorengehen, wird das zulässige Kostenminimum mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit über dem unter Vernachlässigung der Nebenbedingungen ermittelten Kostenminimum liegen.

Zunächst werden durch Bildung der partiellen Ableitungen nach n_L und n_B sowie anschließendes Nullsetzen und Auflösen nach den beiden Variablen die extremwertverdächtigen Stellen ermittelt:

$$\frac{\partial K_T}{\partial n_L} = Cr_L - \frac{R \cdot T}{2 \cdot n_L^2} \cdot NL \cdot Cl_L \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad n_L^{ex} = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L}}$$

$$\frac{\partial K_T}{\partial n_B} = \frac{R \cdot T}{2 \cdot n_B^2} \cdot NB \cdot Cl_L + Cut - \frac{R \cdot T}{2 \cdot n_B^2} \cdot Cl_A \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad n_B^{ex} = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{2 \cdot Cut}}$$

Der Term für n_L^{ex} entspricht dem Ausdruck der kostenminimalen Losauflagehäufigkeit des klassischen Losgrößenmodells.¹ Die Ausdrücke für n_L^{ex} und n_B^{ex} besitzen formale Ähnlich-

¹ Die kostenminimalen Losauflagehäufigkeiten des klassischen Modells bei offener und bei geschlossener Produktion ergeben sich per Division der im Planungszeitraum insgesamt zu fertigenden Produkte durch die jeweilige optimale Losgröße; vgl. bspw. BLOECH et al. (2001), S. 266 ff., insbesondere S. 269.

keit. Beide Terme sind Wurzelausdrücke und enthalten als Faktor die Hälfte des Produkts aus der im Planungszeitraum insgesamt zu produzierenden Menge und der Länge des Planungszeitraums. Die Summe der Kostensätze für Umschlag und Transport Cut ist als „Rüstkostensatz“ für die Durchführung eines Transports in n_B^{ex} anzusehen und stellt damit das Pendant zum Rüstkostensatz Cr_L für die Produktion eines Fertigungsloses durch den Lieferanten in n_L^{ex} dar. Während der Ausdruck für die Losauflagehäufigkeit n_L^{ex} des Lieferanten nur durch seine eigenen Parameter bestimmt wird (mit Ausnahme der Weiterverarbeitungsgeschwindigkeit V des Abnehmers in NL , die durch die Synchronisation mit der Absatzgeschwindigkeit jedoch auch kein eigener Produktionsparameter des Abnehmers ist), enthält der Ausdruck für die Bestellhäufigkeit n_B^{ex} des Abnehmers sowohl den Lagerkostensatz Cl_L als auch in NB die Produktionsgeschwindigkeit P des Lieferanten. Damit bildet n_B^{ex} letztlich die Kunden-Lieferanten-Beziehung in der reellwertigen Lösung formal ab.

Im folgenden muß noch geprüft werden, ob die Wurzelausdrücke für n_L^{ex} und n_B^{ex} stets definiert sind, also ob die Terme unter den Quadratwurzeln keine negativen Werte annehmen, und ob die extremwertverdächtige Stelle (n_L^{ex} , n_B^{ex}) auch tatsächlich ein lokales oder sogar das gesuchte globale Kostenminimum repräsentiert.

Damit n_L^{ex} stets definiert ist, muß gelten:
$$\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L} \geq 0$$

Ein Produkt nimmt insbesondere dann nichtnegative Zahlenwerte an, wenn alle seine Faktoren nichtnegativ sind. Dies ist erfüllt für Cl_L , Cr_L , R , T . Da NL für geschlossene und offene Produktionsweise unterschiedlich definiert ist, muß eine differenzierte Betrachtung erfolgen:

$$NL := \begin{cases} 1 + \frac{V}{P}, & \text{bei geschlossener Produktion} \\ 1 - \frac{V}{P}, & \text{bei offener Produktion} \end{cases}$$

Da V und P größer null sind, gilt bei geschlossener Produktion stets $NL > 0$. Im Falle der offenen Produktion ergibt sich durch die Voraussetzung der ständigen Lieferfähigkeit ein Staulager zwischen Lieferant und Abnehmer (also $P > V$) bzw. gar kein Lager (bei $P = V$). Also gilt:

$$P \geq V \Leftrightarrow \frac{V}{P} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{V}{P} \geq 0$$

Damit ist gezeigt, daß jeder Faktor des betrachteten Produkts niemals negative Werte annimmt, demzufolge auch das Produkt insgesamt ein nichtnegatives Ergebnis liefert und somit n_L^{ex} für alle zulässigen Datenkonstellationen berechenbar ist.

Damit n_B^{ex} stets definiert ist, muß gelten:
$$\frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{2 \cdot \text{Cut}} \geq 0$$

Wieder ist zu prüfen, ob die Einzelfaktoren nichtnegativ sind. Dies ist gegeben für Cut, R und T. Hinsichtlich NB muß äquivalent zu NL eine differenzierte Betrachtung für geschlossene und offene Produktion erfolgen:

$$NB := \begin{cases} 1, & \text{bei geschlossener Produktion} \\ 1 - \frac{2 \cdot V}{P}, & \text{bei offener Produktion} \end{cases}$$

Bei geschlossener Produktion muß gelten $Cl_A - Cl_L \geq 0$ bzw. $Cl_A \geq Cl_L$. Diese Forderung erscheint plausibel, weil Lagerkostensätze in der Regel nur zu einem kleinen Teil aus Lagerverwaltungskosten und zum größeren Teil aus Kapitalbindungskosten bestehen. Beim Abnehmer sind die Kapitalbindungskosten pro Stück und Zeiteinheit jedoch im allgemeinen höher als beim Lieferanten, weil letzterer in den Verkaufsstückpreis (welcher ein Bestandteil der Kapitalbindungskosten beim Abnehmer ist) einen Fixkostenanteil und einen Gewinnaufschlag einrechnet.

Im Falle der offenen Produktion muß folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$Cl_A - \left(1 - \frac{2 \cdot V}{P}\right) \cdot Cl_L \geq 0 \Leftrightarrow Cl_A \geq \left(1 - \frac{2 \cdot V}{P}\right) \cdot Cl_L$$

Der Faktor vor Cl_L ist für die weitere Untersuchung bedeutend. Gilt $P \gg V$, kann dieser Faktor näherungsweise gleich eins gesetzt werden. Dies ist gleichzeitig die für diesen Vorfaktor erreichbare obere Schranke, und es ergibt sich für diesen speziellen Fall:

$$Cl_A \geq \left(1 - \frac{2 \cdot V}{P}\right) \cdot Cl_L \Rightarrow P \gg V \Rightarrow Cl_A \geq 1 \cdot Cl_L \Rightarrow Cl_A \geq Cl_L$$

Die Plausibilität der Beziehung $Cl_A \geq Cl_L$ kann wie bei geschlossener Produktion begründet werden. Zur Vollständigkeit sei erwähnt, daß der Vorfaktor für $P = V$ den Wert minus eins annimmt, was seiner unteren Grenze entspricht. Weiterhin wird der Faktor im Bereich $V \leq P < 2 \cdot V$ negativ, wodurch der rechte Teil der betrachteten Ungleichung negativ wird, während der linke Teil positiv bleibt (da sowohl Cl_A als auch Cl_L größer als null sind). Innerhalb des Bereichs $V \leq P < 2 \cdot V$ ist die Ungleichung deshalb stets erfüllt, unabhängig davon, in welchem Größenverhältnis Cl_A und Cl_L zueinander stehen.

Unter der plausiblen Annahme $Cl_A \geq Cl_L$ ist n_B^{ex} stets berechenbar, da durch diese Prämisse der Term unter der Quadratwurzel nur nichtnegative Werte annehmen kann.

Zum Nachweis eines lokalen Minimums der Kostenfunktion an der Stelle $(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}})$ sind die partiellen Ableitungen zweiten Grades der Kostenfunktion bezogen auf n_L und n_B zu bilden, und es ist zu überprüfen, ob gilt:

$$\frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L^2}(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) \cdot \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B^2}(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) - \left(\frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B \partial n_L}(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) \right)^2 > 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L^2}(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) > 0 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B^2}(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) > 0 \right)$$

Nachweis des lokalen Kostenminimums bei $(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}})$:

$$\frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L^2} = \frac{2 \cdot R \cdot T}{2 \cdot n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L = \frac{R \cdot T}{n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L$$

$$\frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B^2} = -\frac{2 \cdot R \cdot T}{2 \cdot n_B^3} \cdot NB \cdot Cl_L + \frac{2 \cdot R \cdot T}{2 \cdot n_B^3} \cdot Cl_A = \frac{R \cdot T}{n_B^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)$$

$$\frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B \partial n_L} = \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L \partial n_B} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L^2} (n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) \cdot \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B^2} (n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) - \left(\frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B \partial n_L} (n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}}) \right)^2 \\ &= \frac{R \cdot T}{(n_L^{\text{ex}})^3} \cdot NL \cdot Cl_L \cdot \frac{R \cdot T}{(n_B^{\text{ex}})^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) - 0 \\ &= \frac{R \cdot T \cdot NL \cdot Cl_L}{\left(\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L}} \right)^3} \cdot \frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{\left(\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{2 \cdot Cut}} \right)^3} \\ &= \frac{2 \cdot Cr_L}{\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L}}} \cdot \frac{2 \cdot Cut}{\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{2 \cdot Cut}}} \\ &= \frac{2 \cdot Cr_L}{n_L^{\text{ex}}} \cdot \frac{2 \cdot Cut}{n_B^{\text{ex}}} > 0 \end{aligned}$$

(Ungleichung ist erfüllt, da jeder Faktor größer null ist.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L^2} (n_L^{\text{ex}}) &= \frac{R \cdot T}{(n_L^{\text{ex}})^3} \cdot NL \cdot Cl_L \\ &= \frac{R \cdot T \cdot NL \cdot Cl_L}{\left(\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L}} \right)^3} = \frac{2 \cdot Cr_L}{\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L}}} \\ &= \frac{2 \cdot Cr_L}{n_L^{\text{ex}}} > 0 \end{aligned}$$

(Ungleichung ist erfüllt, da Faktor größer null ist.)

Damit ist erwiesen, daß die Kostenfunktion an der Stelle $(n_L^{\text{ex}}, n_B^{\text{ex}})$ ihr einziges lokales Minimum besitzt.

Es gilt:
$$n_L^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L}}; \quad n_B^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{2 \cdot Cut}}$$

Zum Nachweis des globalen Minimums der Kostenfunktion an der Stelle $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ ist zu zeigen, daß die Kostenfunktion innerhalb der Definitionsbereiche von n_L und n_B konvex verläuft. Besitzt die Kostenfunktion nur ein lokales Minimum und einen konvexen Verlauf, so ist das lokale gleichzeitig auch das globale Kostenminimum, da ausgehend vom lokalen Kostenminimum (einziger Punkt mit einer waagerechten Tangentialebene) die Kosten in alle Richtungen innerhalb der Definitionsbereiche ansteigen.

Nachweis des konvexen Verlaufs der Kostenfunktion für $n_L > 0, n_B > 0$:

Eine mehrdimensionale Funktion ist genau dann konvex, wenn ihre HESSE-Matrix H (Matrix der zweiten partiellen Ableitungen mit den „reinen“ Ableitungen nach nur einer Variablen auf der Hauptdiagonale) positiv semidefinit ist. Positiv semidefinit ist eine Matrix genau dann, wenn sie quadratisch ist, und es gilt:¹

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A_{n \times n} \cdot \underline{x} \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathfrak{R}^n \quad \text{mit } \underline{x} \text{ als Spaltenvektor}$$

Konkret ist für die vorliegende zweidimensionale Kostenfunktion zu zeigen:

$$(x \ y) \cdot H_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L^2} & \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_L \partial n_B} \\ \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B \partial n_L} & \frac{\partial^2 K_T}{\partial n_B^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}$$

Zunächst werden die partiellen Ableitungen in den Ausdruck eingesetzt, und es wird vereinfacht:

$$\begin{aligned} (x \ y) \cdot H_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x \ y) \cdot \begin{bmatrix} \frac{R \cdot T}{n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L & 0 \\ 0 & \frac{R \cdot T}{n_B^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x \ y) \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{R \cdot T}{n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L \right) \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + \left(\frac{R \cdot T}{n_B^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) \right) \cdot y \end{bmatrix} \\ &= \left[\left(\frac{R \cdot T}{n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L \right) \cdot x^2 + 0 \cdot x \cdot y \right] + \left[0 \cdot x \cdot y + \left(\frac{R \cdot T}{n_B^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) \right) \cdot y^2 \right] \\ &= \left(\frac{R \cdot T}{n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L \right) \cdot x^2 + \left(\frac{R \cdot T}{n_B^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) \right) \cdot y^2 \end{aligned}$$

¹ Zur Konvexität mehrdimensionaler Funktionen vgl. RÄDE/WESTERGREN (1997), S. 366; zum Nachweis, daß eine Matrix positiv semidefinit ist, vgl. ebenda, S. 100.

Es ist noch zu zeigen, daß der erhaltene Ausdruck nichtnegativ ist:

$$\left(\frac{R \cdot T}{n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L \right) \cdot x^2 + \left(\frac{R \cdot T}{n_B^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) \right) \cdot y^2 \geq 0$$

Eine Summe ist insbesondere dann nichtnegativ, wenn alle ihre Summanden nichtnegativ sind. Im folgenden werden die Summanden einzeln betrachtet:

$$\left(\frac{R \cdot T}{n_L^3} \cdot NL \cdot Cl_L \right) \cdot x^2 \geq 0,$$

$$\text{da } R > 0, T > 0, n_L > 0, NL > 0, Cl_L > 0, x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\left(\frac{R \cdot T}{n_B^3} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) \right) \cdot y^2 \geq 0,$$

$$\text{da } R > 0, T > 0, n_B > 0, [Cl_A - NB \cdot Cl_L] > 0 \\ \text{(denn annahmegemäß } Cl_A \geq Cl_L), y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathfrak{R}$$

Damit ist gezeigt, daß beide Summanden und somit die Summe insgesamt niemals negativ werden. Daraus folgt, daß die HESSE-Matrix der Kostenfunktion positiv semidefinit ist. Dies bedeutet einen konvexen Verlauf der Kostenfunktion innerhalb der Definitionsbereiche $n_L > 0$ und $n_B > 0$. Die Ausdrücke für n_L^{opt} und n_B^{opt} führen folglich zum gesuchten globalen Kostenminimum.

4.2 Ableitung des einfachen Ellipsenverfahrens

Da in den formalen Ausdrücken für n_L^{opt} und n_B^{opt} die jeweils andere Variable nicht enthalten ist, sind die Optima völlig unabhängig voneinander. Dies bedeutet, daß man bei zusätzlicher Beachtung der Ganzzahligkeitsbedingungen (vorerst ohne die Bedingung $n_B = q \cdot n_L$) unabhängig von der konkreten Höhe des ganzzahligen Wertes einer der beiden Variablen immer versuchen wird, mit dem jeweiligen anderen ganzzahligen Variablenwert so nah wie möglich bei dem entsprechenden reellwertigen Optimum zu bleiben.

Der konvexe Verlauf der Kostenfunktion bewirkt, daß ein Abweichen vom Optimum einer Variablen in positiver oder negativer Richtung stets zu einem Kostenanstieg führt. Mithin ist eine ganzzahlige Lösungskonstellation beider Variablen stets schlechter als eine andere, wenn beide Variablenwerte stärker in der gleichen Richtung vom Optimum abweichen als bei der Vergleichslösung.

Die Variablenwerte für n_L und n_B können jedoch nicht völlig frei durch Runden in möglichst nahe bei den reellen Werten von n_L^{opt} und n_B^{opt} liegende ganze Zahlen überführt werden, weil zusätzlich noch die Nebenbedingung eines ganzzahligen Verhältnisses q der beiden Losauflagehäufigkeiten zueinander einzuhalten ist. Da aber das Verhältnis $q^{\text{opt}} = n_B^{\text{opt}} / n_L^{\text{opt}}$

im allgemeinen nicht ganzzahlig sein wird, muß auch diese Größe durch Runden in eine ganze Zahl überführt werden.

Daraus ergibt sich als triviales Lösungsverfahren zur Bestimmung der minimalen Kosten unter Einhaltung aller Ganzzahligkeitsbedingungen die vollständige Enumeration aller ganzzahligen n_L und n_B , die „möglichst nahe“ bei n_L^{opt} und n_B^{opt} liegen und zusätzlich in einem ganzzahligen Verhältnis q zueinander stehen, welches sich wiederum „möglichst nahe“ bei q^{opt} befindet. Anschließend sind für alle gefundenen potentiellen kostenminimalen Konstellationen von n_L und n_B die zugehörigen Kosten zu bestimmen, bevor durch Vergleich die Minimalkostenkonstellation identifiziert werden kann.

Eine Einschränkung des Suchraums ergibt sich nur aus der obengenannten Tatsache, daß eine neu gefundene ganzzahlige Kombination von n_L und n_B , bei der im Vergleich zu einem anderen bereits identifizierten zulässigen (n_L, n_B) -Paar beide Variablenwerte in positiver bzw. negativer Richtung weiter von den Optimalwerten entfernt liegen, zwingend mit höheren Kosten verbunden ist als die betrachtete Vergleichslösung. Jedoch ist andererseits zu berücksichtigen, daß die Verhältniszahl q sowohl durch Auf- als auch durch Abrunden von q^{opt} bestimmt werden kann und daß nicht nur die unmittelbaren ganzzahligen Nachbarn von q^{opt} in die Betrachtung mit einzubeziehen sind, da sonst das erreichbare Kostenminimum verfehlt werden könnte. Diese Vielzahl möglicher Ausprägungen von q dehnt den relevanten Lösungsraum wiederum aus.

Ausgangspunkt eines auf den beschriebenen Vorüberlegungen gründenden Suchverfahrens sind also die Werte n_L^{opt} , n_B^{opt} und q^{opt} . Durch Runden und Einschränken des Suchraums werden daraufhin zulässige Lösungskonstellationen entwickelt, die immer weiter von der reellwertigen Optimallösung entfernt liegen, was letztlich einem „Stochern im Nebel von innen nach außen“ entspricht. Ein derartiges Verfahren bricht ab, wenn auf der Basis der jeweiligen Kriterien zur Suchraumeinschränkung keine neuen zulässigen Lösungskonstellationen mehr gebildet werden können. Dasjenige zulässige (n_L, n_B) -Paar aus der Menge der gefundenen potentiellen Lösungen, welches die geringsten Kosten verursacht, ist die gesuchte Lösung.¹ Selbst wenn Kriterien gefunden werden, mit denen sich der Suchraum bei Anwendung des Algorithmus recht effizient einschränken läßt, führt dies bestenfalls dennoch nur zu einem „intelligenteren Stochern im Nebel von innen nach außen“, wobei die Ausdehnung des letztlich zu untersuchenden Lösungsraums nicht von vornherein bekannt ist.

Im Gegensatz zur skizzierten Lösungsidee soll im folgenden ein Verfahren entwickelt werden, das zwar ebenfalls von den Optimalwerten n_L^{opt} , n_B^{opt} und q^{opt} ausgeht und durch anschließendes Runden ganzzahlige Werte für n_L , n_B und q erzeugt, aber bereits mit der ersten zulässigen Lösung den relevanten Suchraum eingrenzt. Dieser wird durch Intervalle beschrieben, in denen die alle Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllenden kostenminimierenden Losauflagehäufigkeiten n_L und n_B liegen müssen. Nur innerhalb dieses Lösungsraums muß nachfolgend systematisch nach besseren Lösungen gesucht werden.

Das im folgenden herzuleitende Verfahren basiert auf der Grundidee, das Funktionsgebirge der Kostenfunktion in einer ganz bestimmten Höhe (Isokostenebene), determiniert durch ge-

¹ Ein derartiges Verfahren nutzt MÜLLER (2000), S. 320 ff. zur Ermittlung kostenminimaler ganzzahliger Produktionslosauflage- und Transporthäufigkeiten.

rundete, zulässige n_L - und n_B -Werte, „durchzuschneiden“ und bei der weiteren Lösungssuche nur noch solche zulässigen n_L und n_B zu betrachten, die innerhalb der entstehenden Schnittfigur (ringförmige Isokostenlinie) liegen. Bedingt durch den konvexen Verlauf der Kostenfunktion stellt das zugehörige Funktionsgebirge einen nach unten geschlossenen und sich nach oben hin öffnenden Trichter dar. Dadurch verursachen alle (n_L, n_B) -Paare, die sich innerhalb des durch eine Isokostenebene gebildeten Isokostenrings befinden, geringere Kosten als dasjenige (n_L, n_B) -Paar, das zur Bestimmung des Isokostenrings verwendet wurde. Deshalb ist es sinnvoll, nur innerhalb des so abgegrenzten Gebiets nach weiteren potentiellen Lösungen zu suchen. Damit verändert sich die oben als „Stochern im Nebel von innen nach außen“ bezeichnete Vorgehensweise hin zu einer Lösungssuche von außen nach innen innerhalb eines fest eingegrenzten Gebiets des Lösungsraums. Innerhalb des eingegrenzten Lösungsraums kann ganz gezielt nach einer möglichst nah an der reellwertigen Optimallösung liegenden zulässigen Lösung gesucht werden, die mit niedrigeren Kosten als die Anfangslösung verbunden ist und eine neue Isokostenebene für die folgende Lösungsfindung vorgibt.

Die Herleitung des Verfahrens geht von der Funktion der entscheidungsrelevanten Kosten aus:

$$K_T(n_L, n_B) = C_{rL} \cdot n_L + \frac{R \cdot T}{2 \cdot n_L} \cdot NL \cdot Cl_L + \frac{R \cdot T}{2 \cdot n_B} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) + Cut \cdot n_B$$

Ausklammern von $1/n_L$ bzw. $1/n_B$:

$$K_T(n_L, n_B) = \frac{1}{n_L} \cdot \left(C_{rL} \cdot n_L^2 + \frac{R \cdot T}{2} \cdot NL \cdot Cl_L \right) + \frac{1}{n_B} \cdot \left(\frac{R \cdot T}{2} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) + Cut \cdot n_B^2 \right)$$

Vergleich der nicht von n_L bzw. n_B abhängigen Summanden in den Klammern mit n_L^{opt} bzw. n_B^{opt} :

$$\frac{R \cdot T}{2} \cdot NL \cdot Cl_L = C_{rL} \cdot \left(\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot C_{rL}}} \right)^2 = C_{rL} \cdot \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2$$

$$\frac{R \cdot T}{2} \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L) = Cut \cdot \left(\sqrt{\frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{2 \cdot Cut}} \right)^2 = Cut \cdot \left(n_B^{\text{opt}} \right)^2$$

Substituieren des jeweiligen Summanden durch den von n_L^{opt} bzw. n_B^{opt} abhängigen Ausdruck:

$$K_T(n_L, n_B) = \frac{1}{n_L} \cdot \left(C_{rL} \cdot n_L^2 + C_{rL} \cdot \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2 \right) + \frac{1}{n_B} \cdot \left(Cut \cdot n_B^2 + Cut \cdot \left(n_B^{\text{opt}} \right)^2 \right)$$

An diesem Ausdruck wird die Symmetrie des betrachteten Problems hinsichtlich der Produktionslosaufgabe- und der Bestellhäufigkeit erkennbar. Insbesondere im reellwertigen Kostenminimum (also $n_L = n_L^{\text{opt}}$ und $n_B = n_B^{\text{opt}}$) ergibt sich aus obiger Beziehung eine ganz einfache Berechnungsvorschrift für die in einer konkreten Situation minimalen Kosten:

$$K_T^{\min} = \frac{1}{n_L^{\text{opt}}} \cdot \left(2 \cdot Cr_L \cdot \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2 \right) + \frac{1}{n_B^{\text{opt}}} \cdot \left(2 \cdot Cut \cdot \left(n_B^{\text{opt}} \right)^2 \right) = 2 \cdot \left(Cr_L \cdot n_L^{\text{opt}} + Cut \cdot n_B^{\text{opt}} \right)$$

Ausklammern der Kostensätze in der allgemeinen Formel für $K_T(n_L, n_B)$:

$$K_T(n_L, n_B) = \frac{Cr_L}{n_L} \cdot \left(n_L^2 + \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2 \right) + \frac{Cut}{n_B} \cdot \left(n_B^2 + \left(n_B^{\text{opt}} \right)^2 \right)$$

Anwendung einer binomischen Formel und quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} K_T(n_L, n_B) &= \frac{Cr_L}{n_L} \cdot \left(\left(n_L - n_L^{\text{opt}} \right)^2 + 2 \cdot n_L \cdot n_L^{\text{opt}} \right) + \frac{Cut}{n_B} \cdot \left(\left(n_B - n_B^{\text{opt}} \right)^2 + 2 \cdot n_B \cdot n_B^{\text{opt}} \right) \\ &= Cr_L \cdot \left(\frac{\left(n_L - n_L^{\text{opt}} \right)^2}{n_L} + 2 \cdot n_L^{\text{opt}} \right) + Cut \cdot \left(\frac{\left(n_B - n_B^{\text{opt}} \right)^2}{n_B} + 2 \cdot n_B^{\text{opt}} \right) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Umsortieren:

$$K_T(n_L, n_B) = Cr_L \cdot \frac{\left(n_L - n_L^{\text{opt}} \right)^2}{n_L} + Cut \cdot \frac{\left(n_B - n_B^{\text{opt}} \right)^2}{n_B} + Cr_L \cdot 2 \cdot n_L^{\text{opt}} + Cut \cdot 2 \cdot n_B^{\text{opt}}$$

Substituieren der letzten beiden Summanden durch K_T^{\min} :

$$K_T(n_L, n_B) = Cr_L \cdot \frac{\left(n_L - n_L^{\text{opt}} \right)^2}{n_L} + Cut \cdot \frac{\left(n_B - n_B^{\text{opt}} \right)^2}{n_B} + K_T^{\min}$$

Der erhaltene Ausdruck der Kostenfunktion kann durch Umstellen leicht in die Koordinatengleichung einer Ellipse überführt werden. Bevor dies geschieht, soll kurz generell auf eine solche Ellipsengleichung eingegangen werden. Die allgemeine Form der Koordinatengleichung einer Ellipse mit parallel zu den Koordinatenachsen verlaufenden Ellipsenachsen lautet wie folgt:¹

$$1 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

Der Mittelpunkt der durch die Gleichung beschriebenen Ellipse befindet sich bei (x_0, y_0) . Die Parameter a und b repräsentieren die halbe Länge von Haupt- und Nebenachse der Ellipse. Beide erwähnten Achsen verlaufen durch den Mittelpunkt der Ellipse und stehen senkrecht aufeinander. Die längere der beiden Achsen wird als Hauptachse (sie verbindet die beiden am weitesten voneinander entfernt gegenüberliegenden Punkte der Ellipse miteinander) und die kürzere als Nebenachse (sie verbindet die beiden einander am nächsten

¹ Zur Koordinatengleichung einer Ellipse und deren Interpretation vgl. bspw. BOSCH (1998), S. 222.

gegenüberliegenden Punkte der Ellipse miteinander) bezeichnet. Variabel in der Gleichung sind x und y .

Umformung der Kostenfunktion zur Koordinatengleichung einer Ellipse:

$$K_T - K_T^{\min} = Cr_L \cdot \frac{(n_L - n_L^{\text{opt}})^2}{n_L} + \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}$$

$$K_T - K_T^{\min} = \frac{(n_L - n_L^{\text{opt}})^2}{\frac{n_L}{Cr_L}} + \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{\frac{n_B}{\text{Cut}}}$$

$$1 = \frac{(n_L - n_L^{\text{opt}})^2}{\frac{n_L}{Cr_L} \cdot (K_T - K_T^{\min})} + \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{\frac{n_B}{\text{Cut}} \cdot (K_T - K_T^{\min})}$$

Die hergeleitete Gleichung entspricht in ihrer Struktur der formalen Darstellung der Koordinatengleichung einer Ellipse mit parallel zu den Koordinatenachsen verlaufenden Ellipsenachsen. Den Mittelpunkt der Ellipse stellt das Kostenminimum bei n_L^{opt} und n_B^{opt} dar. Die Variablen zur Bestimmung der Ellipse sind n_L und n_B . Die Variablenwerte werden so variiert, daß K_T konstant bleibt, was der Fixierung des Höhenniveaus des Funktionsgebirges entspricht. Als quadrierte Ellipsenparameter a und b sind die Nenner der beiden Brüche aufzufassen:

$$a^2 = \frac{n_L}{Cr_L} \cdot (K_T - K_T^{\min}) \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{n_L}{Cr_L} \cdot (K_T - K_T^{\min})}$$

$$b^2 = \frac{n_B}{\text{Cut}} \cdot (K_T - K_T^{\min}) \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{\frac{n_B}{\text{Cut}} \cdot (K_T - K_T^{\min})}$$

Unter Zuhilfenahme dieser Ellipsengleichung kann ein generelles Vorgehen zur Ermittlung der minimalen Gesamtkosten unter den verlangten Ganzzahligkeitsbedingungen entwickelt werden, das sich aus mehreren Lösungsschritten zusammensetzt:

1. Berechnung von n_L^{opt} , n_B^{opt} und q^{opt} sowie der zugehörigen Kosten K_T^{\min}
2. Runden von n_L^{opt} und q^{opt} auf ganze Zahlen nach den Rundungsregeln, Ermittlung des zugehörigen ganzzahligen n_B -Wertes mittels der Beziehung $n_B^{\text{ganz}} = n_L^{\text{rund}} \cdot q^{\text{rund}}$ und Berechnung der entstehenden Kosten K_T^{rund}
3. Berechnung der Ellipsenparameter a und b mit den Werten n_L^{rund} , n_B^{ganz} und K_T^{rund}

4. Die hergeleitete Ellipsengleichung beschreibt unter Verwendung der ermittelten Parameter a und b eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$, die durch den Punkt $(n_L^{\text{rund}}, n_B^{\text{ganz}})$ auf dem konstanten Niveau K_T^{rund} des Funktionsgebietes verläuft. Jene die Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllenden (n_L, n_B) -Tupel, die im Inneren der Ellipse liegen, lassen geringere resultierende Kosten erwarten. Die Ermittlung aller innerhalb der Ellipse liegenden zulässigen (n_L, n_B) -Tupel mit Hilfe der Ellipsengleichung ist jedoch analytisch aufwendig; darum wird an dieser Stelle auf eine Vereinfachung zurückgegriffen. Da die Ellipse parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet ist, werden tangential an die Ellipse zu den Koordinatenachsen parallele Geraden so angelegt, daß das durch die Geraden gebildete Rechteck die Ellipse gerade einschließt. Die Geraden tangieren die Ellipse nur in den Punkten, in denen auch die Haupt- und Nebenachse den Ellipsenrand berühren. Somit erfolgt eine Approximation der Ellipse durch ein Rechteck um den Mittelpunkt. Analytisch bedeutet diese Rechteckapproximation eine Intervallbildung um den Ellipsenmittelpunkt mit Hilfe der Längen der Halbachsen a und b :

$$[n_L^{\text{opt}} - a; n_L^{\text{opt}} + a], \quad [n_B^{\text{opt}} - b; n_B^{\text{opt}} + b]$$

Durch diese analytische Vereinfachung wird der Suchraum für zulässige (n_L, n_B) -Tupel jedoch wieder erweitert, und es kann nicht davon ausgegangen werden, daß alle innerhalb des Rechtecks liegenden, die Ganzzahligkeitsbedingung erfüllenden (n_L, n_B) -Paare auch tatsächlich geringere Kosten als die zur Ellipsenbildung herangezogene zulässige Lösung verursachen. Dieser Tatsache muß im nächsten Verfahrensschritt Rechnung getragen werden.

5. Alle ganzen Zahlen innerhalb der beiden im vierten Schritt ermittelten geschlossenen Intervalle sind potentielle Werte entweder für n_L oder für n_B , wenn sie in einem ganzzahligen Verhältnis $q = n_B / n_L$ zueinander stehen. Beginnend mit dem *entgegen* den Rundungsregeln auf eine ganze Zahl gerundeten n_L^{opt} -Wert wird geprüft, ob durch Multiplikation mit ganzen Zahlen Werte berechnet werden können, die im Intervall von n_B liegen. Können solche n_B -Werte gefunden werden, sind die zum entsprechenden (n_L, n_B) -Tupel gehörenden Kosten K_T zu ermitteln, und es ist zu prüfen, ob diese Kosten geringer sind als die Kosten K_T^{rund} , die aus n_L^{rund} und n_B^{ganz} berechnet wurden.

Gilt $K_T > K_T^{\text{rund}}$, wird das (n_L, n_B) -Paar als lösungsirrelevant verworfen, und es ist der n_L^{opt} nächstliegende, noch unberücksichtigte ganzzahlige n_L -Wert in äquivalenter Art und Weise zu betrachten. Mithin ergibt sich bei wiederholtem Ablehnen der gefundenen (n_L, n_B) -Paare ein um n_L^{opt} alternierendes und sich dabei gleichzeitig von n_L^{opt} entfernendes Suchverfahren. Dieses Vorgehen innerhalb des Suchraums ist vorteilhaft, weil, bedingt durch den konvexen Verlauf der Kostenfunktion, mit zunehmender Entfernung von n_L^{opt} die Kosten ansteigen, also gerade die ganzzahligen n_L -Werte nahe n_L^{opt} geringere Kosten versprechen. Allerdings ist zu bedenken, daß die aus der relativen Nähe zu n_L^{opt} resultierenden niedrigen Kosten bei ungünstigem ganzzahligem Verhältnis von n_B zu n_L durch entsprechend höhere Kosten durch große Entfernung zu n_B^{opt} überkompensiert werden können.

Gilt jedoch $K_T \leq K_T^{\text{rund}}$, wird mit der gefundenen (n_L, n_B, K_T) -Kombination eine neue Ellipse gebildet, die sich durch kleinere Ellipsenhalbachsen a und b auszeichnet und somit den Suchraum weiter eingrenzt. Eine fortgesetzte Suche von zulässigen Lösungen

innerhalb der größeren Ellipse, genauer innerhalb des daraus gebildeten Rechtecks, ist nicht zweckmäßig, denn es können noch viele unberücksichtigte ganzzahlige n_L -Werte innerhalb des alten, aber außerhalb des neu zu bildenden kleineren Rechtecks liegen, die jedoch als potentielle Lösungen nicht mehr in Betracht kommen. Mit den neu zu berechnenden a und b wird wieder eine Rechteckapproximation durch Intervallbildung vorgenommen. Das alternierend sich von n_L^{opt} entfernende Verfahren wird innerhalb des neuen n_L -Intervalls an der Stelle fortgesetzt, an der es vor der erneuten Ellipsenbildung unterbrochen wurde, und Schritt fünf wiederholt sich. Die Verfahrensschleife bricht ab, wenn innerhalb der abgegrenzten Intervalle keine weiteren (n_L, n_B) -Paare als potentielle Lösungen identifiziert werden können. Das bis dahin ermittelte ganzzahlige (n_L, n_B) -Tupel mit den geringsten zugehörigen Kosten K_T ist im Sinne dieses „einfachen“ Ellipsenverfahrens die gesuchte Lösung des Kunden-Lieferanten-Problems.

4.3 Modifikation des einfachen Ellipsenverfahrens zum korrigierten Ellipsenverfahren

Das im vorhergehenden Unterkapitel entwickelte Ellipsenverfahren basiert auf einer sukzessiven Verkleinerung des Suchbereichs für potentielle Lösungen. Dadurch, daß die erste zulässige Lösung in unmittelbarer Nähe zur von den geforderten Ganzzahligkeitsbedingungen abstrahierenden und daher in der Regel reellwertigen, unzulässigen Optimallösung gesucht wird, kann der Lösungsraum schon beim erstmaligen Verfahrensdurchlauf im vierten Lösungsschritt sehr stark eingeschränkt werden. Dabei wird erwartungsgemäß nur eine begrenzte Zahl möglicher Lösungskonstellationen innerhalb der auf der Basis der Ellipsenparameter a und b gebildeten Suchintervalle liegen.

Jedoch vernachlässigt der Lösungsalgorithmus bei der Rechteckapproximation eine wesentliche Eigenschaft der abgeleiteten Ellipsengleichung, wodurch das Verfahren mit einem Fehler behaftet ist, der dazu führen kann, daß die alle Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllende kostenminimale Lösung nicht gefunden wird. Der Fehler besteht darin, daß die Ellipsenparameter a und b als Konstanten aufgefaßt werden, die mit Hilfe eines zulässigen $(n_L^{\text{rund}}, n_B^{\text{ganz}})$ -Tupels berechnet werden. Bei der anschließenden Intervallbildung um den Mittelpunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ wird davon ausgegangen, daß a und b für die gesamte Ellipse konstant, also unabhängig von den Variablen n_L und n_B sind. Aber im Zähler von a steht n_L , und im Zähler von b befindet sich n_B . Dies hat zur Konsequenz, daß für alle (n_L, n_B) -Tupel, die auf derselben Schnittfigur (Isokostenring) des Funktionsgebirges in einer bestimmten Kostenhöhe liegen, andere (a, b) -Kombinationen gehören. Anders ausgedrückt beschreibt die aus der Kostenfunktion abgeleitete Ellipsengleichung keine ideale, gleichförmige Ellipse; vielmehr besitzt sie graphisch betrachtet eine unregelmäßige, nur an eine Ellipse erinnernde Gestalt.

Je enger die ermittelte Ellipse um den Mittelpunkt verläuft (also je näher das $(n_L^{\text{rund}}, n_B^{\text{ganz}})$ -Tupel beim Mittelpunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ liegt), desto geringer ist der mit dem Verfahren verursachte Fehler, weil sich der tatsächliche Isokostenring mit zunehmender Nähe zum absoluten Kostenminimum einer idealen Ellipsengestalt annähert. Dann reichen zur Beschreibung des Isokostenrings kleinere Zahlenbereiche aus, innerhalb derer n_L und n_B schwanken können, und auch die Schwankungsbreiten der zugehörigen Ellipsenparameter a und b schrumpfen. Dies führt zu einer Verringerung des verfahrensbedingten absoluten Fehlers, der sich daraus

ergibt, daß a und b nur aus dem $(n_L^{\text{rund}}, n_B^{\text{ganz}})$ -Tupel berechnet und anschließend als konstant angenommen werden.

Das im vorhergehenden Unterkapitel hergeleitete einfache Verfahren soll daher im folgenden als unkorrigiertes Ellipsenverfahren bezeichnet werden. Die Idealisierung des Isokostenschnitts durch das Funktionsgebirge zu einer gleichmäßigen Ellipse kann bewirken, daß das gesuchte ganzzahlige und gleichzeitig kostenminimale (n_L, n_B) -Tupel zwar innerhalb des tatsächlichen Isokostenrings, aber außerhalb des eingeschränkten ellipsenförmigen Suchraums liegt. Somit besteht die Möglichkeit, daß durch das Verfahren die optimale Lösung verfehlt wird. Das unkorrigierte Ellipsenverfahren ist daher nur als eine einfache Heuristik anzusehen, die allerdings recht gute Ergebnisse erwarten läßt, weil bereits der erste Lösungsschritt eine Ellipse erzeugt, die nah am Mittelpunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ liegt und dadurch dem tatsächlichen Isokostenring des entsprechenden Kostenniveaus annähernd entspricht.

Im folgenden wird das unkorrigierte, fehlerbehaftete zu einem korrigierten und damit exakten Ellipsenverfahren weiterentwickelt. Das schrittweise Vorgehen als solches mit seinem reellwertigen Ausgangspunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ und der davon abgeleiteten Ermittlung von n_L^{rund} und n_B^{ganz} kann beibehalten werden. Jedoch ist der Fehler bei der analytischen Behandlung der Ellipsenhalbachsen a und b sowie der darauf aufbauenden Rechteckapproximation zu beseitigen. Die mathematisch exakte Analyse der Ellipsengleichung entspricht der analytischen Ermittlung der formalen, expliziten Funktionen (im Gegensatz zur bisher genutzten impliziten Ellipsengleichung) des Isokostenrings. Für diese expliziten Funktionen gibt es zwei mögliche Darstellungsformen: Entweder wird n_L als Funktion von n_B oder n_B als Funktion von n_L bei jeweils konstantem Kostenniveau K_T aufgefaßt und anschließend die hergeleitete Ellipsengleichung nach der jeweils abhängigen Variablen umgestellt. Eine Ellipsengleichung stellt ähnlich wie eine Kreisgleichung keine mathematische Funktion im Sinne einer eindeutigen Abbildung dar, denn jedem Urbild (Ausprägung der unabhängigen Variablen) werden zwei Bilder (Ausprägungen der abhängigen Variablen) zugeordnet. Durch die Umstellung wird die Ellipsengleichung in zwei Funktionen vom Typ $n_L = f(n_B)$ oder in zwei Funktionen vom Typ $n_B = f(n_L)$ aufgeteilt, wobei die beiden Funktionen eines Abhängigkeitstyps den oberen und unteren Teil des Isokostenrings, geteilt durch eine durch den Mittelpunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ verlaufende waagerechte Trennachse, beschreiben.

Mit Hilfe dieser vier Funktionen (zwei Funktionen je Abhängigkeitstyp) können unter Beibehaltung des jeweiligen Kostenniveaus die Minimal- und Maximalausdehnungen des tatsächlichen, unregelmäßigen Isokostenrings ermittelt werden, indem für jede dieser Funktionen eine Extremwertbetrachtung vorgenommen wird. Zu erwarten sind als Extrema der vier Funktionen zwei Minima (zu den unteren Isokostenringabschnitten) und zwei Maxima (zu den oberen Isokostenringabschnitten). Mit den Minima und Maxima ist der Isokostenring mittels Bildung von Zulässigkeitsintervallen für n_L und n_B durch ein Rechteck zu approximieren (entspricht der Rechteckapproximation mit a und b beim unkorrigierten Ellipsenverfahren). Dieses Rechteck kann zur Begrenzung des Suchbereichs für die analog zum unkorrigierten Ellipsenverfahren weiter durchzuführenden Untersuchungen genutzt werden. Diese allgemeine, mathematisch exakte Lösungsfindung ist dem Anhang beigelegt und führt zu dem gleichen Ergebnis, wie ein viel einfacherer Lösungsweg, der im folgenden verfolgt werden soll.

Aus der hergeleiteten Ellipsengleichung wurden im vorhergehenden Unterkapitel als charakteristische Ellipsengrößen der Mittelpunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ und die Ellipsenhalbachsen a und b ermittelt. Zur Rechteckapproximation wurden weiterhin die Intervalle $[n_L^{\text{opt}} - a, n_L^{\text{opt}} + a]$ und $[n_B^{\text{opt}} - b, n_B^{\text{opt}} + b]$ gebildet. Da a von n_L und b von n_B abhängt, sind diese Intervalle für alle Wertepaare (n_L, n_B) ermittelbar, die den tatsächlichen Isokostenring als Schnittfigur des Funktionsgebietes der Kostenfunktion bilden. Für jedes Wertepaar (n_L, n_B) ergibt sich ein spezielles Intervallpaar für n_L und n_B , weil jeweils spezifische a und b in die Berechnung einfließen.

Allgemein gilt, daß bei jeder Ellipsengleichung die Ellipsenachsen durch den Ellipsenmittelpunkt verlaufen und somit die Ellipsenhalbachsen a und b den Mittelpunkt mit den Maximal- und Minimalpunkten der Ellipse verbinden. Diese Extrempunkte der Ellipse werden durch die Wertepaare $(n_L^{\text{opt}} - a(n_L^{\text{min}}), n_B^{\text{opt}})$, $(n_L^{\text{opt}} + a(n_L^{\text{max}}), n_B^{\text{opt}})$ in n_L -Richtung und $(n_B^{\text{opt}} - b(n_B^{\text{min}}), n_L^{\text{opt}})$, $(n_B^{\text{opt}} + b(n_B^{\text{max}}), n_L^{\text{opt}})$ in n_B -Richtung charakterisiert. Damit können folgende Gleichungen für die Extremstellen des Isokostenrings aufgestellt werden:

$$n_L^{\text{min}} = n_L^{\text{opt}} - a(n_L^{\text{min}}) = n_L^{\text{opt}} - \sqrt{\frac{n_L^{\text{min}}}{Cr_L} \cdot (K_T - K_T^{\text{min}})}$$

$$n_L^{\text{max}} = n_L^{\text{opt}} + a(n_L^{\text{max}}) = n_L^{\text{opt}} + \sqrt{\frac{n_L^{\text{max}}}{Cr_L} \cdot (K_T - K_T^{\text{min}})}$$

$$n_B^{\text{min}} = n_B^{\text{opt}} - b(n_B^{\text{min}}) = n_B^{\text{opt}} - \sqrt{\frac{n_B^{\text{min}}}{Cut} \cdot (K_T - K_T^{\text{min}})}$$

$$n_B^{\text{max}} = n_B^{\text{opt}} + b(n_B^{\text{max}}) = n_B^{\text{opt}} + \sqrt{\frac{n_B^{\text{max}}}{Cut} \cdot (K_T - K_T^{\text{min}})}$$

Durch Umstellen jeder Gleichung nach n_X^{ext} mit $X \in \{L, B\}$ und $\text{ext} \in \{\text{min}, \text{max}\}$ werden die exakten Intervalle $[n_L^{\text{min}}, n_L^{\text{max}}]$ und $[n_B^{\text{min}}, n_B^{\text{max}}]$ ermittelt, um das Suchbereichsrechteck abzugrenzen.

Umstellung nach n_L^{min} :

$$n_L^{\text{min}} = n_L^{\text{opt}} - a(n_L^{\text{min}}) = n_L^{\text{opt}} - \sqrt{\frac{n_L^{\text{min}}}{Cr_L} \cdot (K_T - K_T^{\text{min}})}$$

$$0 = n_L^{\text{min}} + \sqrt{n_L^{\text{min}}} \cdot \sqrt{\frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{Cr_L}} - n_L^{\text{opt}} \quad (\text{quadratische Gleichung für } \sqrt{n_L^{\text{min}}})$$

$$\sqrt{n_L^{\text{min}}}^{1/2} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{Cr_L}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{Cr_L} + n_L^{\text{opt}}}$$

(Lösung mit negativem Vorzeichen vor dem hinteren Wurzelausdruck braucht nicht weiter untersucht zu werden, weil in diesem Fall Wurzel n_L^{\min} negativ sein müßte, was aber nicht möglich ist!)

$$\sqrt{n_L^{\min}} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{K_T - K_T^{\min}}{C_{rL}}} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{C_{rL}} + n_L^{\text{opt}}}$$

$$n_L^{\min} = \frac{1}{4} \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{C_{rL}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{C_{rL}} + n_L^{\text{opt}} - \frac{2}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{C_{rL}} + n_L^{\text{opt}}} \cdot \sqrt{\frac{K_T - K_T^{\min}}{C_{rL}}}$$

$$n_L^{\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} - \sqrt{\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} + 2 \cdot n_L^{\text{opt}}} \cdot \sqrt{\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}}}$$

$$n_L^{\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} - \sqrt{\left(\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} + 2 \cdot n_L^{\text{opt}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}}}$$

Analog zu obiger Herleitung können die Bestimmungsgleichungen für n_L^{\max} , n_B^{\min} und n_B^{\max} ermittelt werden, und es ergeben sich die vier Ausdrücke:

$$n_L^{\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} - \sqrt{\left(\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} + 2 \cdot n_L^{\text{opt}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}}}$$

$$n_L^{\max} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} + \sqrt{\left(\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}} + 2 \cdot n_L^{\text{opt}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot C_{rL}}}$$

$$n_B^{\min} = n_B^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} - \sqrt{\left(\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} + 2 \cdot n_B^{\text{opt}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}}}$$

$$n_B^{\max} = n_B^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} + \sqrt{\left(\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} + 2 \cdot n_B^{\text{opt}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}}}$$

Der zu n_L^{opt} bzw. n_B^{opt} addierte in allen Fällen identische positive Quotient in den formalen Darstellungen der Extremwerte n_L^{\min} und n_L^{\max} bzw. n_B^{\min} und n_B^{\max} zeigt, daß sich der Mittelpunkt der Schnittfigur des Kostengebirges mit zunehmender Höhe des Kostenniveaus K_T vom Punkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ hin zu größeren n_L - und n_B -Werten verschiebt. Dabei ist zu beachten, daß die Verbindungsgeraden der Extrempunkte, also die Ellipsenachsen, nach wie vor durch den Ellipsenmittelpunkt $(n_L^{\text{opt}}, n_B^{\text{opt}})$ verlaufen. Die Wurzelterme der vier Ausdrücke repräsentieren die „korrigierten Halbachsen“ \hat{a} und \hat{b} für den unsymmetrischen Isokostenring. Um das korrigierte Ellipsenverfahren äquivalent zum unkorrigierten Verfahren darstellen zu können, wird definiert:

$$n_L^{\text{Mitte}} := n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{2 \cdot Cr_L}, \quad \hat{a} := \sqrt{\left(\frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{2 \cdot Cr_L} + 2 \cdot n_L^{\text{opt}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{2 \cdot Cr_L}}$$

$$n_B^{\text{Mitte}} := n_B^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{2 \cdot Cut}, \quad \hat{b} := \sqrt{\left(\frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{2 \cdot Cut} + 2 \cdot n_B^{\text{opt}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\text{min}}}{2 \cdot Cut}}$$

Unter Verwendung dieser neuen Größen wird die im vierten Schritt des unkorrigierten Ellipsenverfahrens vorgenommene Rechteckapproximation modifiziert. Der tatsächliche, unsymmetrische Isokostenring wird mittels der Intervalle $[n_L^{\text{Mitte}} - \hat{a}, n_L^{\text{Mitte}} + \hat{a}]$ und $[n_B^{\text{Mitte}} - \hat{b}, n_B^{\text{Mitte}} + \hat{b}]$ durch ein Suchbereichsrechteck approximiert, welches den Isokostenring gerade einschließt.

Das korrigierte Ellipsenverfahren läßt sich durch Übertragung der fünf Schritte des unkorrigierten Ellipsenverfahrens folgendermaßen darstellen:

1. Berechnung von n_L^{opt} , n_B^{opt} und q^{opt} sowie der zugehörigen Kosten K_T^{min}
2. Runden von n_L^{opt} und q^{opt} auf ganze Zahlen nach den Rundungsregeln, Ermittlung des zugehörigen ganzzahligen n_B -Wertes mittels der Beziehung $n_B^{\text{ganz}} = n_L^{\text{rund}} \cdot q^{\text{rund}}$ und Berechnung der entstehenden Kosten K_T^{rund}
3. Berechnung der Parameter n_L^{Mitte} , n_B^{Mitte} , \hat{a} und \hat{b} mit dem Wert K_T^{rund}
4. Rechteckapproximation des Isokostenrings als Suchraum für bessere Lösungen mit Hilfe der Intervalle $[n_L^{\text{Mitte}} - \hat{a}; n_L^{\text{Mitte}} + \hat{a}]$, $[n_B^{\text{Mitte}} - \hat{b}; n_B^{\text{Mitte}} + \hat{b}]$
5. Beginnend mit dem *entgegen* den Rundungsregeln auf eine ganze Zahl gerundeten n_L^{opt} -Wert wird geprüft, ob durch Multiplikation mit ganzen Zahlen Werte berechnet werden können, die im Intervall von n_B liegen. Können solche n_B -Werte gefunden werden, sind die zum entsprechenden (n_L, n_B) -Tupel gehörenden Kosten K_T zu ermitteln, und es ist zu prüfen, ob diese Kosten geringer sind als die Kosten K_T^{rund} , die aus n_L^{rund} und n_B^{ganz} berechnet wurden.

Gilt $K_T > K_T^{\text{rund}}$, wird das (n_L, n_B) -Paar als lösungsirrelevant verworfen, und es ist der n_L^{opt} nächstliegende, noch unberücksichtigte ganzzahlige n_L -Wert in äquivalenter Art und Weise zu betrachten. Auch hier ergibt sich bei wiederholtem Ablehnen der gefundenen (n_L, n_B) -Paare ein um n_L^{opt} alternierendes und sich dabei gleichzeitig von n_L^{opt} entfernendes Suchverfahren.

Gilt jedoch $K_T \leq K_T^{\text{rund}}$, wird mit der gefundenen (n_L, n_B, K_T) -Kombination ein neuer Isokostenring gebildet, der sich durch kleinere Halbachsen \hat{a} und \hat{b} auszeichnet und somit den Suchraum weiter eingrenzt. Eine fortgesetzte Suche von zulässigen Lösungen innerhalb des größeren Isokostenrings, genauer innerhalb des daraus gebildeten Rechtecks, ist nicht zweckmäßig, denn es können noch viele unberücksichtigte ganzzahlige n_L -Werte innerhalb des alten und außerhalb des neu zu bildenden kleineren Rechtecks liegen, die jedoch als potentielle Lösungen nicht mehr in Betracht kommen. Mit den neu zu berechnenden \hat{a} , \hat{b} , n_L^{Mitte} und n_B^{Mitte} wird wieder eine

Rechteckapproximation durch Intervallbildung vorgenommen. Das alternierend sich von n_L^{opt} entfernende Verfahren wird innerhalb des neuen n_L -Intervalls an der Stelle fortgesetzt, an der es vor der erneuten Rechteckbildung unterbrochen wurde, und Schritt fünf wiederholt sich. Die Verfahrensschleife bricht ab, wenn innerhalb der abgegrenzten Intervalle keine (n_L, n_B) -Paare mehr als potentielle Lösungen identifiziert werden können. Das bis dahin ermittelte (n_L, n_B) -Tupel mit den geringsten zugehörigen Kosten K_T ist die gesuchte kostenminimale Lösung des Zulieferer-Abnehmer-Problems.

4.4 Kombination von einfachem und korrigiertem Ellipsenverfahren zum zweistufigen Ellipsenverfahren

Das korrigierte, exakte Ellipsenverfahren unterscheidet sich vom einfachen, unkorrigierten Ellipsenverfahren nur durch die Verwendung anderer Formeln zur Eingrenzung des Suchraums. Die fünf Lösungsschritte sind indes identisch. Da die mathematischen Ausdrücke des exakten Verfahrens im Vergleich zur einfachen Heuristik einen höheren Rechenaufwand erfordern, insbesondere muß der Mittelpunkt bei jeder neuen Rechteckapproximation neu berechnet werden, ist es naheliegend, beide Verfahren zu einem zweistufigen Lösungsalgorithmus zu verbinden. Solch ein kombiniertes Vorgehen nutzt in einer ersten Stufe den heuristischen Ansatz, um den Suchraum so weit einzuschränken, bis die im Sinne der Heuristik kostengünstigste Lösung gefunden ist. In der zweiten Stufe wird das Ergebnis mit dem exakten Ellipsenverfahren überprüft und die gefundene Lösung entweder bestätigt oder verworfen und das tatsächliche Kostenminimum ermittelt. Ein solches Vorgehen hat im Vergleich zur ausschließlichen Nutzung des korrigierten Ellipsenverfahrens den Vorteil, daß durch die Ellipsenheuristik bereits der Suchraum sehr effizient eingeschränkt wird und die exakten, aber komplizierteren Formeln des korrigierten Verfahrens nur in einem sehr begrenzten Suchraum Verwendung finden müssen.

4.5 Veranschaulichung des zweistufigen Ellipsenverfahrens an Hand eines Beispiels

4.5.1 Beispieldaten des Zulieferer-Abnehmer-Segments

Das illustrierende Beispiel geht von einem Planungshorizont T von 100 ZE (ZE = Zeiteinheit(en)) aus. Der Lieferant stellt bei produktionssynchronisierter Anlieferung der Rohstoffe in offener Fertigung mit Staulager die Vorprodukte mit einer Geschwindigkeit P von 250 ME je ZE her (ME = Mengeneinheit(en)). Sein Rüstkostensatz Cr_L je Rüstvorgang beträgt 700 GE (GE = Geldeinheit(en)), und sein Ausgangslagerkostensatz Cl_L beläuft sich auf 1 GE je ME und ZE. Die Kosten Cut für eine Lieferung inklusive der bewerteten Umschlagleistungen bei Lieferant und Abnehmer summieren sich zu 800 GE. Der Eingangslagerkostensatz des weiterverarbeitenden Abnehmers Cl_A beträgt 4 GE je ME und ZE. Er produziert absatzsynchron mit der Geschwindigkeit V von 200 ME je ZE, wobei jedes fertiggestellte Produkt sofort zur Weiterleitung an einen Kunden bereitsteht.

Gesucht wird die kostenminimale Dimensionierung der Produktions- und Transportlose bei Ganzzahligkeit der Losauflage-, Bestell- und damit Transporthäufigkeit sowie des Verhältnisses der Häufigkeiten im Planungszeitraum.

Zur Lösung des Problems kann das Ellipsenverfahren in seiner Kombination aus Heuristik und exaktem Verfahren angewandt werden, da alle Einsatzvoraussetzungen erfüllt sind. Die Beispielsituation entspricht in ihrer Struktur dem beim Ellipsenverfahren zugrunde gelegten Modell. Insbesondere gilt auch $Cl_A > Cl_L$, obwohl der Lieferant offen produziert und die Bedingung $V < P < 2 \cdot V$ erfüllt ist, so daß die Restriktion $Cl_A \geq Cl_L$ nicht zwingend zur Lösungsfindung erfüllt sein muß.

4.5.2 Optimierung mit dem zweistufigen Ellipsenverfahren

Stufe 1: Anwendung des unkorrigierten Ellipsenverfahrens

Die Ermittlung der die Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllenden und vermeintlich kostenminimalen Produktionslosauflage- und Bestellhäufigkeit erfolgt in den genannten fünf Schritten.

1. Berechnung von n_L^{opt} , n_B^{opt} und q^{opt} sowie der zugehörigen Kosten K_T^{min} :

$$n_L^{opt} = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot Cl_L \cdot NL}{2 \cdot Cr_L}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 200 \cdot 100 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{200}{250}\right)}{2 \cdot 700}} = 16,90308509$$

$$n_B^{opt} = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot (Cl_A - NB \cdot Cl_L)}{2 \cdot Cut}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 200 \cdot 100 \cdot \left(4 - \left(1 - \frac{2 \cdot 200}{250}\right) \cdot 1\right)}{2 \cdot 800}} = 75,82875444$$

$$q^{opt} = \frac{n_B^{opt}}{n_L^{opt}} = \frac{75,82875444}{16,90308509} = 4,486089612$$

$$K_T^{min} = 2 \cdot (Cr_L \cdot n_L^{opt} + Cut \cdot n_B^{opt}) = 2 \cdot (700 \cdot 16,90308509 + 800 \cdot 75,82875444) = 144.990,3262 \text{ GE}$$

2. Runden von n_L^{opt} und q^{opt} auf ganze Zahlen, Berechnung von n_B^{ganz} und K_T^{rund} :

$$n_L^{rund} = 17 \qquad q^{rund} = 4 \qquad n_B^{ganz} = n_L^{rund} \cdot q^{rund} = 17 \cdot 4 = 68$$

$$K_T^{rund} = \frac{Cr_L}{n_L^{rund}} \cdot \left((n_L^{rund})^2 + (n_L^{opt})^2 \right) + \frac{Cut}{n_B^{ganz}} \cdot \left((n_B^{ganz})^2 + (n_B^{opt})^2 \right)$$

$$= \frac{700}{17} \cdot (17^2 + 16,90308509^2) + \frac{800}{68} \cdot (68^2 + 75,82875444^2) = 145.711,7647 \text{ GE}$$

3. Berechnung der Ellipsenparameter a und b mit den Werten n_L^{rund} , n_B^{ganz} und K_T^{rund} :

$$a = \sqrt{\frac{n_L^{rund}}{Cr_L} \cdot (K_T^{rund} - K_T^{min})} = \sqrt{\frac{17}{700} \cdot (145.711,7647 - 144.990,3262)} = 4,185767467$$

$$b = \sqrt{\frac{n_B^{\text{ganz}}}{\text{Cut}} \cdot (K_T^{\text{rund}} - K_T^{\text{min}})} = \sqrt{\frac{68}{800} \cdot (145.711,7647 - 144.990,3262)} = 7,830853881$$

4. Intervallbildung um den Ellipsenmittelpunkt mit Hilfe der Längen der Halbachsen a und b:

$$[n_L^{\text{opt}} - a, n_L^{\text{opt}} + a] = [16,90308509 - 4,185767467; 16,90308509 + 4,185767467] \\ = [12,71731762; 21,08885256]$$

$$[n_B^{\text{opt}} - b, n_B^{\text{opt}} + b] = [75,82875444 - 7,830853881; 75,82875444 + 7,830853881] \\ = [67,99790056; 83,65960832]$$

5. Suche zulässiger Lösungen beginnend mit $n_L = 16$ (Abrundung von n_L^{opt}):

$n_L = 16 \rightarrow n_B = 80$ (einziger Wert, der als Produkt aus 16 und einer ganzen Zahl im n_B -Intervall liegt: $16 \cdot 5 = 80$)

$$K_T(16, 80) = \frac{700}{16} \cdot (16^2 + 16,90308509^2) + \frac{800}{80} \cdot (80^2 + 75,82875444^2) = 145.200 \text{ GE}$$

$K_T(16, 80) < K_T(17, 68) \rightarrow$ neues potentiell Kostenminimum

Berechnung der Ellipsenhalbachsen a und b für $n_L = 16$ und $n_B = 80$:

$$a = \sqrt{\frac{16}{700} \cdot (145.200 - 144.990,3262)} = 2,189187977$$

$$b = \sqrt{\frac{80}{800} \cdot (145.200 - 144.990,3262)} = 4,579015178$$

Intervallbildung um den Ellipsenmittelpunkt:

$$[n_L^{\text{opt}} - a, n_L^{\text{opt}} + a] = [14,71389711; 19,09227307]$$

$$[n_B^{\text{opt}} - b, n_B^{\text{opt}} + b] = [71,24973926; 80,40776962]$$

Fortsetzung der Suche alternierend mit $n_L = 18 = 17 + 1$:

$n_L = 18 \rightarrow n_B = 72$ (einziger Wert, der als Produkt aus 18 und einer ganzen Zahl im n_B -Intervall liegt: $18 \cdot 4 = 72$)

$$K_T(18, 72) = \frac{700}{18} \cdot (18^2 + 16,90308509^2) + \frac{800}{72} \cdot (72^2 + 75,82875444^2) = 145.200 \text{ GE}$$

$K_T(18, 72) = K_T(16, 80) \rightarrow$ keine Kostenverringern

Fortsetzung der Suche alternierend mit $n_L = 15 = 16 - 1$:

$n_L = 15 \rightarrow n_B = 75$ (einziger Wert, der als Produkt aus 15 und einer ganzen Zahl im n_B -Intervall liegt: $15 \cdot 5 = 75$)

$$K_T(15, 75) = \frac{700}{15} \cdot (15^2 + 16,90308509^2) + \frac{800}{75} \cdot (75^2 + 75,82875444^2) = 145.166,6667 \text{ GE}$$

$K_T(15, 75) < K_T(16, 80) \rightarrow$ neues potentiell Kostenminimum

Berechnung der Ellipsenhalbachsen a und b für $n_L = 15$ und $n_B = 75$:

$$a = \sqrt{\frac{15}{700} \cdot (145.166,6667 - 144.990,3262)} = 1,943894056$$

$$b = \sqrt{\frac{75}{800} \cdot (145.166,6667 - 144.990,3262)} = 4,065946131$$

Intervallbildung um den Ellipsenmittelpunkt:

$$[n_L^{\text{opt}} - a, n_L^{\text{opt}} + a] = [14,95919103; 18,84697915]$$

$$[n_B^{\text{opt}} - b, n_B^{\text{opt}} + b] = [71,76280831; 79,89470057]$$

Suche zulässiger Lösungen durch Fortsetzung des alternierenden Verfahrens ist nicht möglich, da alle ganzzahligen n_L -Werte innerhalb des neuen Intervalls bereits untersucht wurden! → Abbruch des Verfahrens!

Die zulässige Lösung mit den geringsten Kosten im Sinne der Heuristik lautet:

$$n_L = 15, \quad n_B = 75, \quad K_T(15, 75) = 145.166,6667 \text{ GE}$$

Stufe 2: Lösungsüberprüfung mit dem korrigierten Ellipsenverfahren

Mit der vermeintlich kostenminimalen Lösung der Heuristik wird ein neues Suchbereichsrechteck abgegrenzt und anschließend überprüft, ob sich weitere „lösungsverdächtige“ und zulässige (n_L, n_B) -Kombinationen innerhalb des Rechtecks befinden. Wenn dies der Fall ist, werden die jeweils entstehenden Kosten auf Minimalität überprüft. Anschließend werden aus den kostenminimalen Auflagehäufigkeiten für die Produktions- und die Transportlose die zugehörigen Produktions- und Transportlosgrößen berechnet.

1. Verwendung von $(n_L, n_B) = (15, 75)$ zur Rechteckapproximation

Berechnung von n_L^{Mitte} , n_B^{Mitte} , \hat{a} und \hat{b} für $n_L = 15$ und $n_B = 75$:

$$n_L^{\text{Mitte}} = 16,90308509 + \frac{145.166,6667 - 144.990,3262}{2 \cdot 700} = 17,02904259$$

$$n_B^{\text{Mitte}} = 75,82875444 + \frac{145.166,6667 - 144.990,3262}{2 \cdot 800} = 75,93896725$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\left(\frac{145.166,6667 - 144.990,3262}{2 \cdot 700} + 2 \cdot 16,90308509 \right) \cdot \frac{145.166,6667 - 144.990,3262}{2 \cdot 700}} \\ &= 2,067366918 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \sqrt{\left(\frac{145.166,6667 - 144.990,3262}{2 \cdot 800} + 2 \cdot 75,82875444 \right) \cdot \frac{145.166,6667 - 144.990,3262}{2 \cdot 800}} \\ &= 4,089834649 \end{aligned}$$

Intervallbildung um den Mittelpunkt des Isokostenrings:

$$[n_L^{\text{Mitte}} - \hat{a}, n_L^{\text{Mitte}} + \hat{a}] = [14,96167567; 19,09640951]$$

$$[n_B^{\text{Mitte}} - \hat{b}; n_B^{\text{Mitte}} + \hat{b}] = [71,8491326; 80,0288019]$$

2. Suche zulässiger Lösungen durch Neustart des alternierenden Verfahrens bei $n_L = 16$ (Abrundung von n_L^{opt} ; ein Neustart des Suchverfahrens ist deshalb notwendig, weil sich beim exakten Verfahren das Suchbereichsrechteck im Vergleich zur Heuristik verschiebt; also bisher nicht zu berücksichtigende Werte eventuell in den neuen Suchbereich fallen):

$$n_L = 16 \rightarrow n_B = 80 \quad (\text{bereits mit Heuristik untersuchte und verworfene Lösung})$$

Fortsetzung der Suche alternierend mit $n_L = 17 = 16 + 1$:

$$n_L = 17 \rightarrow n_B \text{ existiert nicht (kein Wert liegt als Produkt aus 17 und einer ganzen Zahl im } n_B\text{-Intervall: } 17 \cdot 4 = 68, 17 \cdot 5 = 85)$$

Fortsetzung der Suche alternierend mit $n_L = 15 = 16 - 1$:

$$n_L = 15 \rightarrow n_B = 75 \quad (\text{bereits zur Ableitung des Isokostenrings verwendete Lösung})$$

Fortsetzung der Suche alternierend mit $n_L = 18 = 17 + 1$:

$$n_L = 18 \rightarrow n_B = 72 \quad (\text{bereits mit Heuristik untersuchte und verworfene Lösung})$$

Fortsetzung der Suche alternierend mit $n_L = 14 = 15 - 1$:

$$n_L = 14 \rightarrow \text{Wert liegt außerhalb des abgegrenzten Suchintervalls für } n_L$$

Fortsetzung der Suche alternierend mit $n_L = 19 = 18 + 1$:

$$n_L = 19 \rightarrow n_B = 76 \quad (\text{einziger Wert, der als Produkt aus 19 und einer ganzen Zahl im } n_B\text{-Intervall liegt: } 19 \cdot 4 = 76)$$

$$K_T(19, 76) = \frac{700}{19} \cdot (19^2 + 16,90308509^2) + \frac{800}{76} \cdot (76^2 + 75,82875444^2) = 145.152,6316 \text{ GE}$$

$$K_T(19, 76) < K_T(15, 75) \rightarrow \text{neues potentielles Kostenminimum}$$

Mit $n_L = 19$ sind alle ganzzahligen n_L -Werte innerhalb des abgegrenzten n_L -Intervalls erreicht, und das Verfahren bricht ab. Die kostenminimale Lösung unter Beachtung der Ganzzahligkeitsbedingungen lautet:

$$n_L = 19, \quad n_B = 76, \quad K_T(19, 76) = 145.152,6316 \text{ GE}$$

3. Berechnung von y_L und y_B aus n_L und n_B :

$$y_L = \frac{R}{n_L} = \frac{100 \cdot 200}{19} = 1.052,631579 \text{ ME} \quad y_B = \frac{R}{n_B} = \frac{100 \cdot 200}{76} = 263,1578947 \text{ ME}$$

Da beide Losgrößen nicht ganzzahlig sind, ist, um in ganzen Stücken losweise fertigen und ausliefern zu können, eine Rundung vorzunehmen:

$$y_L = \begin{cases} 1.052, & \text{beginnend beim 1. } y_L \text{ für jedes weitere im Abstand 3 folgende } y_L \\ 1.053, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_B = \begin{cases} 264, & \text{für jedes 6. } y_B \\ 263, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei derartiger Aufteilung ergeben sich im Zeitraum T 20.000 ME als Fertigungsmengen sowohl für die Zwischenprodukte $((1.052 + 1.053 + 1.053) \cdot 6 + 1.052)$ als auch für die Fertigprodukte $((263 + 263 + 263 + 263 + 263 + 264) \cdot 12 + 263 + 263 + 263 + 263)$. Jedoch ist zu beachten, daß durch die variierenden Losgrößen unterschiedlich lange Zyklen entstehen und so die Abbildung der Lagerbestände und dadurch auch die hergeleiteten Lagerkosten verfälscht werden. Aber aufgrund der recht großen Produktionslose und Bestellmengen und deren jeweiligen Schwankungen um nur eine Mengeneinheit sind diese Abweichungen vernachlässigbar.

Abschließend wird die Vorgehensweise des zweistufigen Ellipsenverfahrens anhand des Beispiels durch zwei Graphiken veranschaulicht. Die umkreisten Zahlen numerieren die (n_L, n_B) -Tupel in der Reihenfolge ihrer verfahrensbedingten Ermittlung.

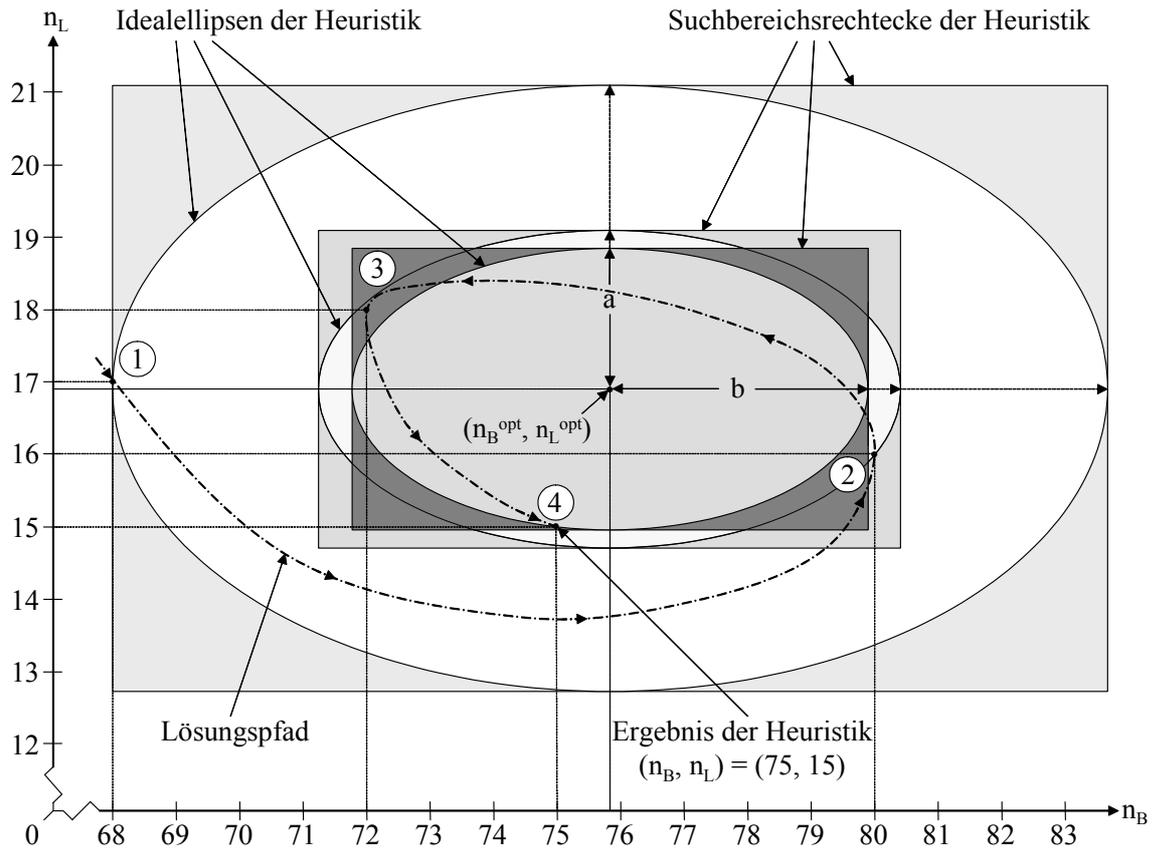


Abbildung 1: Stufe 1 des zweistufigen Ellipsenverfahrens – Unkorrigiertes Ellipsenverfahren

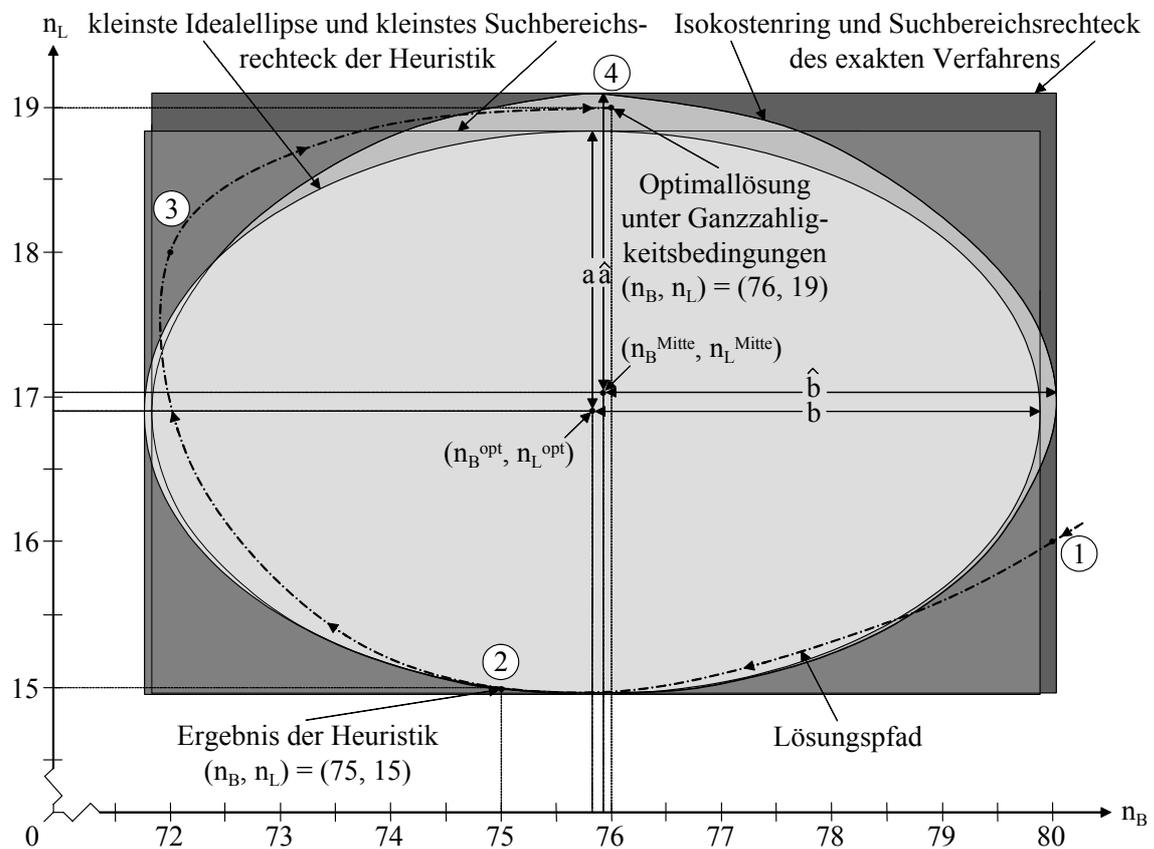


Abbildung 2: Stufe 2 des zweistufigen Ellipsenverfahrens – Korrigiertes Ellipsenverfahren

5 Kritische Würdigung

Im vorliegenden Arbeitsbericht wurde zunächst ein Modell zur kurzfristigen Abstimmung der Produktionsprozesse zweier Wertschöpfungspartner präsentiert, um darauf aufbauend einen neuartigen, auf Ellipsengleichungen beruhenden Algorithmus zur Bestimmung einer ganzzahligen Optimallösung des Problems entwickeln zu können. Mit der Betrachtung eines aus einer produktspezifischen Wertschöpfungskette herausgelösten Kunden-Lieferanten-Segments wurde ein kleiner, aber zentraler Ausschnitt aus der im Supply Chain Management erforderlichen integrierten Unternehmensverbundplanung thematisiert.

Das präsentierte *Modell* bildet die gesamte logistische Prozeßkette von der Produktion eines Zulieferers bis zum Wareneingangslager des weiterverarbeitenden Kunden ab, wobei alle kurzfristig relevanten Kosten der Teilprozesse „Produktion“, „Umschlag“, „Transport“ und „Lagerung“ erfaßt werden. Allerdings wird nur die Beziehung zwischen einem produktions-synchron versorgten Lieferanten und einem absatzsynchron fertigenden Abnehmer modelliert, die mit der Herstellung eines einzigen (Zwischen-)Produkts befaßt sind.

Durch die Konstruktion des Modells ist es aber zumindest theoretisch möglich, mehrere Zulieferer-Abnehmer-Segmente miteinander zu koppeln, indem beispielsweise das Wareneingangslager des Lieferanten (als Kunde eines Vorlieferanten) und/oder die Produktion und das Warenausgangslager des Abnehmers (als Lieferant eines nachgelagerten Abnehmers) sowie die übrigen Subsysteme der angefügten Segmente mit abgebildet werden. Auf diese Weise könnte die betrachtete Wertschöpfungskette entsprechend verlängert werden. Dadurch steigt aber die Modellkomplexität in nicht unerheblichem Maße. In einer Netzwerkorganisation existieren an den Segmentschnittstellen aber nicht nur 1:1-, sondern in der Regel m:n-Geschäftsbeziehungen, die ebenfalls zu erfassen sind.¹ Und letztlich müßten auch Interdependenzen mit den übrigen Produkten der kooperierenden Wertschöpfungspartner berücksichtigt werden. Ein netzwerkweites Totalmodell, das alle relevanten Interdependenzen zwischen allen beteiligten Unternehmen und Produkten abbildet, wird es aber auf Grund der beschränkten menschlichen Informationsgewinnungs- und -verarbeitungsgeschwindigkeit nicht geben können. Selbst wenn es gelänge, ein derartiges Modell aufzustellen, so wäre man nicht in der Lage, es auszuwerten.

Schließlich geht das vorgestellte Modell nur von statisch deterministischen Größen aus. Eine erste Möglichkeit, sowohl geplante als auch zufällige Datenänderungen zu erfassen, besteht in der Entwicklung und Verwendung unterschiedlicher Planungsszenarien (Szenariotechnik²). Die Produktions- und Transportlosgrößen werden dann jeweils abhängig vom eintretenden Szenario angepaßt. Um drohende Fehlmengen infolge zufällig eintretender Parameteränderungen abfangen zu können, müssen auf der Basis stochastischer Größen Sicherheitsbestände geplant und gehalten werden.

Das entwickelte *Ellipsenverfahren* zur simultanen Ermittlung der Produktionslosgröße eines Lieferanten und der mit der Transportlosgröße identischen Bestellmenge des von ihm belieferten Abnehmers umfaßt zwei Planungsschritte. Zunächst wird mit einer heuristischen

1 Vgl. hierzu GUO/GANESHAN (1995), S. 892 ff. und HOMBURG (1995), S. 828 ff.

2 Zur Szenarioplanung vgl. bspw. GÖTZE (1993).

Variante des Ellipsenverfahrens der Lösungsraum so weit eingeschränkt, bis die im Sinne der Heuristik kostengünstigste Lösung gefunden ist. Sodann wird das Ergebnis mit der optimierenden Variante des Ellipsenverfahrens überprüft und die gefundene Lösung entweder bestätigt oder verworfen, um anschließend das tatsächliche Kostenminimum zu berechnen. Mit Hilfe der einfachen Ellipsenheuristik wird der Suchraum bereits effizient eingegrenzt, so daß das aufwendigere korrigierte Verfahren nur in einem relativ kleinen Raum zur Anwendung gelangen muß. Die Konvergenz des Verfahrens ist gesichert.

Auch wenn der Geltungsbereich des vorliegenden Modells auf variierbare Kapazitäten und/oder Rationalisierungsinvestitionen und damit auf längerfristige logistische Gestaltungsfragen ausgedehnt wird, bleibt das zweistufige Ellipsenverfahren anwendbar.¹

Abschließend ist zu resümieren, daß das präsentierte Modell zur Minimierung der Logistikkosten in Kunden-Lieferanten-Systemen Erweiterungen in viele Richtungen zuläßt und daß das zweistufige Ellipsenverfahren als theoretische Grundlage für die Entwicklung von Heuristiken zur Auswertung auch komplexerer Modelle im Sinne des SCM eingesetzt werden kann. Es ist jedoch zu erwarten, daß durch Erweiterungen die analytische Handhabbarkeit recht schnell stark eingeschränkt wird oder gar verlorengeht.

¹ Beispielsweise könnte das in BOGASCHEWSKY/MÜLLER/ROLLBERG (1999), S. 142 f. vorgestellte dreistufige Verfahren zur Optimierung logistischer Zulieferer-Abnehmer-Systeme unter Berücksichtigung kapazitiver Anpassungsmaßnahmen vereinfacht werden, wenn in der zweiten Stufe das kombinierte Ellipsenverfahren angewandt würde.

Anhang

Zur allgemeinen und mathematisch exakten Ermittlung von n_L^{\max} und n_L^{\min} in Abhängigkeit von n_B bei konstantem K_T ist von der hergeleiteten Ellipsengleichung auszugehen:

$$1 = \frac{(n_L - n_L^{\text{opt}})^2}{\frac{n_L}{Cr_L} \cdot (K_T - K_T^{\text{min}})} + \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{\frac{n_B}{\text{Cut}} \cdot (K_T - K_T^{\text{min}})}$$

$$K_T - K_T^{\text{min}} = Cr_L \cdot \frac{(n_L - n_L^{\text{opt}})^2}{n_L} + \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}$$

$$\frac{(n_L - n_L^{\text{opt}})^2}{n_L} = \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{Cr_L}$$

$$(n_L - n_L^{\text{opt}})^2 = n_L \cdot \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{Cr_L}$$

$$n_L^2 - 2 \cdot n_L \cdot n_L^{\text{opt}} + (n_L^{\text{opt}})^2 = n_L \cdot \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{Cr_L}$$

$$0 = n_L^2 - \left(\frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{Cr_L} + 2 \cdot n_L^{\text{opt}} \right) \cdot n_L + (n_L^{\text{opt}})^2$$

$$n_{L1/2} = n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L}$$

$$\pm \sqrt{\left(\left(n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right)^2 - (n_L^{\text{opt}})^2 \right)}$$

Obige Lösung der quadratischen Gleichung stellt die explizite Form der impliziten Ellipsengleichung des Isokostenrings dar. Der Ausdruck besteht also nicht nur aus einer Funktion (im Sinne einer eindeutigen Abbildung). Vielmehr beinhaltet die Gleichung zwei Funktionen (steht vor der Wurzel ein Minus, erfasst die gesamte Gleichung den unteren Teil des Rings, durch ein Plus vor der Wurzel bildet der gesamte Ausdruck den oberen Teil des Rings ab).

Das Maximum n_L^{\max} in Abhängigkeit von n_B des oberen Ringteils erhält man durch Ableitung der Funktion (vor der Wurzel steht ein Plus!) nach n_B , Nullsetzen und Auflösen nach n_B . Äquivalent dazu ergibt sich das Minimum n_L^{\min} in Abhängigkeit von n_B des unteren Ringteils durch Ableitung der Funktion (vor der Wurzel steht ein Minus!) nach n_B , Nullsetzen und Auflösen nach n_B .

Ableitung des Gesamtausdrucks $n_{L1/2}$ nach n_B :

$$\begin{aligned} \frac{dn_{L1/2}}{dn_B} &= -\frac{\text{Cut}}{2 \cdot Cr_L} \cdot \frac{2 \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}}) \cdot n_B - (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B^2} \\ &\pm \frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\left(n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\min}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right) \right)^2 - (n_L^{\text{opt}})^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot 2 \cdot \left(-\left(n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\min}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right) \right) \\ &\cdot \left(-\frac{\text{Cut}}{2 \cdot Cr_L} \cdot \frac{2 \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}}) \cdot n_B - (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B^2} \right) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$0 = \frac{2 \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}}) \cdot n_B - (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[-\frac{\text{Cut}}{2 \cdot Cr_L} \right. \\ \left. \pm \left[\left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right) \right]^2 - (n_L^{\text{opt}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right) \\ \cdot \left(-\frac{\text{Cut}}{2 \cdot Cr_L} \right) \end{array} \right\}$$

Ein Produkt wird null, wenn mindestens ein Faktor null ist.

Betrachtung des ersten Faktors:

$$0 = \frac{2 \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}}) \cdot n_B - (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B^2}$$

$$0 = 2 \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}}) \cdot n_B - (n_B - n_B^{\text{opt}})^2$$

$$(n_B - n_B^{\text{opt}}) \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}}) = 2 \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}}) \cdot n_B \quad \rightarrow \quad \text{erfüllt für: } n_B = n_B^{\text{opt}}$$

$$\text{wenn } n_B \neq n_B^{\text{opt}} : n_B - n_B^{\text{opt}} = 2 \cdot n_B \quad \rightarrow \quad n_B = -n_B^{\text{opt}}$$

→ irrelevant, weil $n_B < 0$ außerhalb des Definitionsbereichs liegt

→ Sowohl für den oberen als auch für den unteren Ellipsenast ist $n_B = n_B^{\text{opt}}$ eine extremwertverdächtige Stelle.

Betrachtung des zweiten Faktors:

$$0 = -\frac{\text{Cut}}{2 \cdot \text{Cr}_L} \pm \left[\left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot (n_B - n_B^{\text{min}})^2}{2 \cdot \text{Cr}_L \cdot n_B} \right)^2 - (n_L^{\text{opt}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{2 \cdot \text{Cr}_L \cdot n_B} \right) \cdot \left(-\frac{\text{Cut}}{2 \cdot \text{Cr}_L} \right)$$

Ausklammern und Kürzen:

$$0 = 1 \pm \left[\left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{2 \cdot \text{Cr}_L \cdot n_B} \right)^2 - (n_L^{\text{opt}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{2 \cdot \text{Cr}_L \cdot n_B} \right)$$

$$1 = \pm \frac{n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{2 \cdot \text{Cr}_L \cdot n_B}}{\sqrt{\left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot (n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{2 \cdot \text{Cr}_L \cdot n_B} \right)^2 - (n_L^{\text{opt}})^2}}$$

$$\pm \sqrt{\left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right)^2 - (n_L^{\text{opt}})^2} =$$

$$n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L}$$

Quadrieren:

$$\left(-n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right)^2 - (n_L^{\text{opt}})^2 =$$

$$\left(n_L^{\text{opt}} + \frac{(K_T - K_T^{\text{min}}) - \text{Cut} \cdot \frac{(n_B - n_B^{\text{opt}})^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right)^2$$

Vereinfachen (quadrierte Klammerausdrücke ergeben auf beiden Gleichungsseiten dasselbe):

$$((...))^2 = (-(...))^2 - (n_L^{\text{opt}})^2 \quad \text{wegen} \quad ((...))^2 = (-(...))^2 \quad \rightarrow \quad 0 = -(n_L^{\text{opt}})^2 \quad \rightarrow \quad n_L^{\text{opt}} = 0$$

Der zweite Faktor der Ableitung sowohl des Ausdrucks für die obere als auch für die untere Hälfte der Ellipse (Vorzeichenunterschied ist durch das Quadrieren verschwunden) wird nur null, wenn $n_L^{\text{opt}} = 0$. Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Variablen n_B und kann somit nicht zu den gesuchten Extrema der Funktionen vom Typ $n_L = f(n_B)$ in Abhängigkeit von n_B führen.

Fazit: Sowohl das Maximum n_L^{max} der oberen Ellipsenhälfte als auch das Minimum n_L^{min} der unteren Ellipsenhälfte liegen an der Stelle n_B^{opt} , da für jedes Extremum jeweils nur eine extremwertverdächtige Stelle existiert.

Ermittlung von n_L^{\max} und n_L^{\min} bei $n_B = n_B^{\text{opt}}$ und konstantem K_T :

$$n_L^{\max/\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{\left(K_T - K_T^{\min} \right) - \text{Cut} \cdot \frac{\left(n_B - n_B^{\text{opt}} \right)^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \pm \sqrt{\left(- \left(n_L^{\text{opt}} + \frac{\left(K_T - K_T^{\min} \right) - \text{Cut} \cdot \frac{\left(n_B - n_B^{\text{opt}} \right)^2}{n_B}}{2 \cdot Cr_L} \right) \right)^2 - \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2}$$

$$n_L^{\max/\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{\left(K_T - K_T^{\min} \right) - \text{Cut} \cdot \frac{\left(n_B^{\text{opt}} - n_B^{\text{opt}} \right)^2}{n_B^{\text{opt}}}}{2 \cdot Cr_L} \pm \sqrt{\left(- \left(n_L^{\text{opt}} + \frac{\left(K_T - K_T^{\min} \right) - \text{Cut} \cdot \frac{\left(n_B^{\text{opt}} - n_B^{\text{opt}} \right)^2}{n_B^{\text{opt}}}}{2 \cdot Cr_L} \right) \right)^2 - \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2}$$

$$n_L^{\max/\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \pm \sqrt{\left(- \left(n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \right) \right)^2 - \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2}$$

$$n_L^{\max/\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \pm \sqrt{\left(n_L^{\text{opt}} \right)^2 + 2 \cdot n_L^{\text{opt}} \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} + \left(\frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \right)^2 - \left(n_L^{\text{opt}} \right)^2}$$

$$n_L^{\max/\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \pm \sqrt{\left(2 \cdot n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L}}$$

Damit ergibt sich für n_L^{\max} :

$$n_L^{\max} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} + \sqrt{\left(2 \cdot n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L}}$$

und für n_L^{\min} :

$$n_L^{\min} = n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} - \sqrt{\left(2 \cdot n_L^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot Cr_L}}$$

Zur allgemeinen und mathematisch exakten Ermittlung von n_B^{\max} und n_B^{\min} in Abhängigkeit von n_L bei konstantem K_T ist analog vorzugehen, wobei sich folgende Ausdrücke ergeben:

$$n_{B1/2} = n_B^{\text{opt}} + \frac{\left(K_T - K_T^{\min}\right) - Cr_L \cdot \frac{\left(n_L - n_L^{\text{opt}}\right)^2}{n_L}}{2 \cdot \text{Cut}}$$

$$\pm \sqrt{\left(- n_B^{\text{opt}} + \frac{\left(K_T - K_T^{\min}\right) - Cr_L \cdot \frac{\left(n_L - n_L^{\text{opt}}\right)^2}{n_L}}{2 \cdot \text{Cut}} \right)^2 - \left(n_B^{\text{opt}}\right)^2}$$

$$n_B^{\max} = n_B^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} + \sqrt{\left(2 \cdot n_B^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}}}$$

$$n_B^{\min} = n_B^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} - \sqrt{\left(2 \cdot n_B^{\text{opt}} + \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}} \right) \cdot \frac{K_T - K_T^{\min}}{2 \cdot \text{Cut}}}$$

Literaturverzeichnis

- ADAM, D. (1998): Produktionsmanagement, 9. Auflage, Wiesbaden 1998.
- ANDLER, K. (1929): Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße, München/Berlin 1929.
- BANERJEE, A. (1986): A Joint Economic-Lot-Size Model for Purchaser and Vendor, in: Decision Sciences, 1986, Nr. 3, S. 292–311.
- BLOECH, J., BOGASCHEWSKY, R., GÖTZE, U., ROLAND, F. (2001): Einführung in die Produktion, 4. Auflage, Heidelberg 2001.
- BOGASCHEWSKY, R., MÜLLER, H., ROLLBERG, R. (1997): Kostenorientierte Optimierung logistischer Kunden-Lieferantenbeziehungen, Dresdner Beiträge zur Betriebswirtschaftslehre, Nr. 8, Dresden 1997.
- BOGASCHEWSKY, R., MÜLLER, H., ROLLBERG, R. (1999): Kostenorientierte Optimierung logistischer Zulieferer-Abnehmersysteme, in: Logistik Management, 1999, Nr. 2, S. 133–145.
- BOGASCHEWSKY, R., ROLLBERG, R. (2002): Produktionssynchrone Zulieferungskonzepte, in: HAHN, D., KAUFMANN, L. (Hrsg.), Handbuch Industrielles Beschaffungsmanagement, 2. Auflage, Wiesbaden 2002, S. 281–300.
- BOSCH, K. (1998): Mathematik-Taschenbuch, 5. Auflage, München/Wien 1998.
- BÜHNER, R. (1989): Strategie und Organisation, in: Zeitschrift Führung + Organisation, 1989, Nr. 4, S. 223–232.
- BUSCHER, U. (2003a): Konzept und Gestaltungsfelder des Supply Network Managements, in: BOGASCHEWSKY, R. (Hrsg.), Integrated Supply Management, München/Neuwied/Köln 2003, S. 55–86.
- BUSCHER, U. (2003b): Kostenorientiertes Logistikmanagement in Metalogistiksystemen, Wiesbaden 2003.
- CHANDLER, A.D. (1962): Strategy and Structure, Cambridge/London 1962.
- CHANDLER, A.D. (1969): Strategy and Structure (Paperback-Ausgabe von CHANDLER (1962)), Cambridge/London 1969.
- CORSTEN, H., GÖSSINGER, R. (2001): Einführung in das Supply Chain Management, München/Wien 2001.
- VON DOBBELER, C. (1920): Berechnung der wirtschaftlichsten Fertigungseinheit bei der Aufstellung eines Fertigungsplanes, in: Der Betrieb, 1920, Nr. 9, S. 213–215.
- GÖTZE, U. (1993): Szenario-Technik in der strategischen Unternehmensplanung, 2. Auflage, Wiesbaden 1993.
- GOYAL, S. K. (1976): An Integrated Inventory Model for a Single-Supplier Single-Customer Problem, in: International Journal of Production Research, 1976, Nr. 1, S. 107–111.
- GÜNTHER, H.-O., TEMPELMEIER, H. (2000): Produktion und Logistik, 4. Auflage, Berlin et al. 2000.
- GUO, Y., GANESHAN, R. (1995): Are More Suppliers Better?, in: Journal of the Operations Research Society, Band 46, 1995, Nr. 7, S. 892–895.
- HAHN, D. (2002): Problemfelder des Supply Chain Management, in: HAHN, D., KAUFMANN, L. (Hrsg.), Handbuch Industrielles Beschaffungsmanagement, 2. Auflage, Wiesbaden 2002, S. 1061–1071.
- HARRIS, F. W. (1913): How Many Parts to Make at Once, in: Factory – The Magazine of Management, 1913, Nr. 2, S. 135–136, 152.
- HARRIS, F. W. (1915): Operations and Cost, Chicago 1915.

- HOFMANN, C. (1995): Interdependente Losgrößenplanung in Logistiksystemen, Stuttgart 1995.
- HOMBURG, C. (1995): Single Sourcing, Double Sourcing, Multiple Sourcing ...?, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 1995, Nr. 8, S. 813–834.
- KEUPER, F. (2001): Strategisches Management, München/Wien 2001.
- KNOLMAYER, G., MERTENS, P., ZEIER, A. (2000): Supply Chain Management auf Basis von SAP-Systemen, Berlin et al. 2000.
- KOCH, H. (1982): Integrierte Unternehmensplanung, Wiesbaden 1982.
- KRÜGER, R., STEVEN, M. (2002): Funktionalitäten von Advanced Planning Systems, in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 2002, Nr. 10, S. 591–595.
- MÜLLER, H. (2000): Betriebsübergreifende simultane Losgrößen- und Bestellmengenplanung, in: BURCHERT, H., HERING, T., ROLLBERG, R. (Hrsg.): Logistik, München/Wien 2000, S. 311–324.
- PANICHI, M. (1996): Wirtschaftlichkeitsanalyse produktionssynchroner Beschaffungen mit Hilfe eines prozeßorientierten Logistikkostenmodells, Lohmar/Köln 1996.
- RÄDE, L., WESTERGREN, B. (1997): Springers Mathematische Formeln, 2. Auflage, Berlin et al. 1997.
- ROLLBERG, R. (1996): Wertschöpfungspartnerschaften und Electronic Data Interchange (EDI), in: Industrie Management, 1996, Nr. 6, S. 51–55.
- ROLLBERG, R. (2001): Integrierte Unternehmensplanung, Wiesbaden 2001.
- ROLLBERG, R. (2002): Integrierte Produktionsplanung – Vom theoretischen Ideal der Simultanplanung bis zum praktischen Kompromiß des „Advanced Planning and Scheduling (APS)“, in: KEUPER, F. (Hrsg.), Produktion und Controlling, Wiesbaden 2002, S. 127–155.
- SCHINZER, H. (1999): Supply Chain Management, in: Das Wirtschaftsstudium, 1999, Nr. 6, S. 857–863.
- SCHWEIM, J. (1969): Integrierte Unternehmensplanung, Bielefeld 1969.
- STADTLER, H. (2000): Supply Chain Management – An Overview, in: STADTLER, H., KILGER, C. (Hrsg.), Supply Chain Management and Advanced Planning, Berlin et al. 2000, S. 7–28.
- STADTLER, H., KILGER, C. (Hrsg.) (2000): Supply Chain Management and Advanced Planning, Berlin et al. 2000.
- STEFANIC-ALLMAYER, K. (1927): Die günstigste Bestellmenge beim Einkauf, in: Sparwirtschaft – Zeitschrift für wirtschaftlichen Betrieb, 1927, S. 504–508.
- SYDOW, J. (1992): Strategische Netzwerke, Wiesbaden 1992.
- TAFT, E. W. (1918): The Most Economical Production Lot (Formulas for Exact and Approximate Evaluation Handling Cost of Jigs and Interest Charges of Product Manufactured), in: The Iron Age, 1918, Nr. 5, S. 1410–1412.
- TEMPELMEIER, H. (1999): Advanced Planning Systems, in: Industrie Management, 1999, Nr. 5, S. 69–72.
- TOPOROWSKI, W. (1999): Unternehmensübergreifende Optimierung der Bestellpolitik – Das JELS-Modell mit einem Intermediär, in: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 1999, Nr. 10, S. 963–989.
- WERNER, H. (2000): Supply Chain Management, Wiesbaden 2000.