ERNST-MORITZ-ARNDT-UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft

Zur Interpretation der Dualvariable der Mindestzielfunktionswertrestriktion im Zustandsgrenzpreismodell

Stefan Mirschel, Michael Lerm

Diskussionspapier 07/2004

Mai 2004

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere

ISSN 1437 − 6989

http://www.rsf.uni-greifswald.de/bwl/paper.html

Dieses Werk ist durch Urheberrecht geschützt. Die damit begründeten Rechte, insbesondere die der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, des Nachdrucks, der Übersetzung, des Vortrags, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur in Auszügen erfolgender Verwendung, vorbehalten. Eine vollständige oder teilweise Vervielfältigung dieses Werkes ist in jedem Fall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen der jeweils geltenden Fassung des Urheberrechtgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 zulässig. Grundsätzlich ist die Vervielfältigung vergütungspflichtig. Verstöße unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Aufl.	Auflage
Bd.	Band
bspw.	beispielsweise
et al.	et alii
f.	folgende
ff.	fortfolgende
Hrsg.	Herausgeber
i. a.	im allgemeinen
i. e. S.	im engeren Sinne
Jg.	Jahrgang
max.	maximiere
min.	minimiere
S.	Seite
u. d. N.	unter den Nebenbedingungen
vgl.	vergleiche

Symbolverzeichnis

b	Index für Bewertungsprogramm
C	Kapitalwert
DP	Dualer Preis
EN	Entnahme
GEN	Wert der gewichteten Entnahmen
gw	Gewichtungsfaktor
k	Projekt
K	Menge aller Projekte
mz	Zahlung des Bewertungsobjekts
opt	Index für Optimum
p_a	Ausgleichsangebot/-auszahlung
p_e	Ausgleichsforderung/-einzahlung
P	Preis
s	Zustand

S	Menge aller Zustände
uz	unabhängige Zahlung
WAR	Wert der ausgeschöpften Restriktionen
x	Projektmenge
x^o	Projektobergrenze
z	Zahlung
δ	Dualvariable der Mindestzielrestriktion
λ	Dualvariablen der Liquiditätsrestriktionen
ξ	Dualvariablen der Projektmengenrestriktionen
ρ	Abzinsungsfaktoren

1 Problemstellung und Gang der Untersuchung

Der subjektive Entscheidungswert der funktionalen Bewertungslehre ist die positive oder negative Grenzzahlungsbereitschaft, die sowohl für den Kauf als auch den Verkauf eines Bewertungsobjekts durch ein Bewertungssubjekt besteht. Zur Ermittlung dieses Werts ist von HERING, basierend auf den linearen Investitionsprogrammen von WEINGARTNER und HAX, dem Bewertungsmodell von LAUX und FRANKE und dem zweistufigen Bewertungsverfahren nach JAENSCH und MATSCHKE, das Zustandsgrenzpreismodell aufgestellt worden.[1] Die Zweistufigkeit des Zustandsgrenzpreismodells besteht darin, daß zunächst ein Basisprogramm ohne das Bewertungsobjekt aufgestellt und anschließend im Bewertungsprogramm der Grenzpreis für das Bewertungsobjekt gesucht wird, wobei einerseits die Handlungsmenge des Basisprogramms um das Bewertungsobjekt zu ändern und andererseits das Erreichen des Zielfunktionswerts im Basisprogramm sicherzustellen ist.

Ein solches lineares Programm besitzt eine duale Entsprechung, die den Wert der ausgeschöpften Restriktionen minimiert. Die dualen Strukturvariablen geben marginalanalytisch die Veränderung des Zielfunktionswerts bei Änderung der zugehörigen primalen Restriktionsschranken um jeweils eine Einheit an. Dies ermöglicht etwa anhand der Dualvariablen der Liquiditätsrestriktionen, die den Wert einer zusätzlichen Geldeinheit in einem Zeitpunkt oder Zustand angeben, die Ermittlung modellendogener Grenzzinssätze als theoretisch exakte Lenkpreise für den Geldeinsatz.

Die endogenen Grenzzinssätze und ihre investitionstheoretische Bedeutung stehen jedoch nicht im Mittelpunkt dieses Arbeitsberichts. Vielmehr interessiert hier der Dualwert des einzuhaltenden Mindestzielfunktionswerts im Bewertungsprogramm, dessen Interpretation bislang unzureichend erscheint.

Dazu werden zunächst in Kapitel zwei die Bedeutung des Entscheidungswerts im Rahmen der funktionalen Bewertungslehre kurz erläutert und das analytische Zustandsgrenzpreismodell vorgestellt. In Kapitel drei wird die Dualvariable δ der Mindestzielwertrestriktion näher untersucht. Es wird gezeigt, daß diese Dualvariable als programmübergreifender Diskontierungsfaktor interpretiert werden kann und die Mindestzielwertrestriktion bei einer nichtentarteten optimalen Lösung immer genau erfüllt ist. Zuletzt wird ein kurzer Ausblick auf den weiteren Forschungsbedarf gegeben.

[1] Vgl. FRANKE/LAUX (1968) , HAX (1964), HERING (1999), WEINGARTNER (1963). Vgl. zum zweistufigen Verfahren JAENSCH (1966a), S. 138 f., JAENSCH (1966b), S. 664 f. sowie MATSCHKE (1969), S. 59, MATSCHKE (1972), S. 153 ff., MATSCHKE (1975), S. 253 ff., 387 ff., auf den die Begriffe Basis- und Bewertungsprogramm zurückgehen.

2 Grundlagen und analytische Ermittlung des Entscheidungswerts

2.1 Der subjektive Entscheidungswert in der funktionalen Bewertungslehre

Die funktionale Bewertungslehre unterscheidet drei aus dem Bewertungszweck abgeleitete Unternehmenswerte – den Entscheidungs-, den Argumentations- und den Schiedswert.[1] In Abhängigkeit von der Zwecksetzung kann sich die Höhe der ermittelten Unternehmenswerte unterscheiden.[2]

Der subjektive Entscheidungswert ermittelt die Grenzzahlungsbereitschaft eines Subjekts für den Kauf oder Verkauf sowie die Fusion oder Spaltung bestimmter Investitionsobjekte wie bspw. ganzer Unternehmen.[3] Er dient dem Zweck, den notwendigen Mindestausgleich zur Sicherstellung der alten Vermögensposition ermitteln zu können. Deshalb ist der Entscheidungswert:[4]

- ein Grenzwert,
- der auf eine bestimmte Handlung bezogen ist,
- welcher wiederum nur für ein Subjekt und dessen Zielsetzungen sowie
- dessen Erwartungen Gültigkeit besitzt.

Mit der Ermittlung des subjektiven Entscheidungswerts geht zugleich die Lösung des Investitionsplanungsproblems einher, in dem das Bewertungsobjekt und die Restriktionen, mit denen das Bewertungssubjekt agieren muß, eingebettet sind. Dadurch wird der Anspruch erfüllt, die Grenze der eigenen Konzessionsbereitschaft unter Beachtung aller Interdependenzen auszuloten.

In Verhandlungen werden die tatsächlichen Entscheidungswerte geheimgehalten.[5] Es wird lediglich mit Argumentationswerten gearbeitet, um für sich eine möglichst vorteilhafte Lösung auszuhandeln und die Gegenseite zu beeinflussen.[6] Ihrem Zweck entsprechend können Argumentationswerte analytisch begründet sein, sie müssen es jedoch nicht. Sie dürfen aber bei ihrem Gebrauch nicht die durch den subjektiven Entscheidungswert gezogene Grenze der Konzessionsbereitschaft verletzen.[7] Um letztlich die Vorteilhaftigkeit eines Verhandlungsangebots einschätzen zu können, wird der Entscheidungswert nach wie vor benötigt. Außerdem ist es für die eigene Argumen-

---

[1] Vgl. MATSCHKE (1976), S. 518 f. Es existieren außerdem noch Nebenwerte wie der Informationswert und der Steuerbemessungswert, die hier keine Bedeutung besitzen.

[2] Vgl. MATSCHKE (1995), S. 973.

[3] Eine Grenzforderung wird bei der Übernahme eines offensichtlich mit subjektiven Nachteilen verbundenen Objektes geltend gemacht.

[4] Vgl. MATSCHKE (1972), S. 147, MATSCHKE (1975), S. 26.

[5] Vgl. MATSCHKE (1976), S. 519.

[6] Vgl. MATSCHKE (1976), S. 521. Für eine zusammenfassende Übersicht über die Merkmale des Argumentationswerts vgl. BRÖSEL (2004), S. 519 ff., insbesondere Abbildung 11 auf S. 519.

[7] Vgl. hierzu und im folgenden MATSCHKE (1975), S. 60 ff., MATSCHKE (1976), S. 524.

tation äußerst vorteilhaft, plausible Vermutungen über den gegnerischen Entscheidungswert anzustellen.[1]

Ein dritter Bewertungsanlaß ist die Vermittlung zwischen Konfliktparteien, für die ein Ausgleich anhand des Schieds- oder Arbitriumwerts gefunden werden muß.[2] Die Ermittlung eines Schiedswertes ist Gegenstand überparteiischer Gutachten, die unter dem Druck eines bestehenden oder in Aussicht gestellten gerichtlichen Verfahrens stehen können. Auch hier ist der subjektive Entscheidungswert jene Größe, die darüber befindet, ob ein verfügter Schiedswert von den Verfahrensbeteiligten als annehmbarer Kompromiß empfunden wird, denn ein für die Konfliktparteien akzeptabler Wert kann sich nur im gemeinsamen Überschneidungsbereich der subjektiven Entscheidungswerte bilden.[3]

Ausgangspunkt einer Bewertung ist zunächst immer der subjektive Entscheidungswert, dessen Ermittlung analytisch mit dem von HERING aufgestellten Zustandsgrenzpreismodell möglich ist.[4]

2.2 Analytisches Grundmodell des Zustandsgrenzpreismodells

Im folgenden soll das Zustandsgrenzpreismodell unter Unsicherheit zur Gewährleistung einer möglichst breiten Gültigkeit der gewonnen Aussagen herangezogen werden. Es seien nur Kauf- oder Verkaufsituationen betrachtet. Bei Unsicherheit ist eine Entscheidung nicht nur von systemendogenen sondern auch von systemexogenen Einflußgrößen abhängig, auf deren jeweilige Ausprägung kein Einfluß besteht.[5] Daher ist bei der Planung i. a. von mehreren Zukunftsszenarien auszugehen, die in einem Zustandsbaum zusammengeführt werden können.[6] Im weiteren wird Unsicherheit i. e. S. unterstellt. Somit sind die Zustände in Anzahl und Ausprägung, nicht jedoch deren Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt.

Wie bereits einleitend erwähnt, ist zunächst das Basisprogramm aufzustellen. Mit seiner Hilfe wird der maximale Zielfunktionswert für die Ausgangssituation ermittelt.[7] Die Zielsetzung besteht in der Maximierung der Summe GEN der mit dem Faktor gw_s gewichteten Entnahmen EN_s aller Zustände $s \in \boldsymbol{S}$ oder kürzer in der Vermögensmaxi-

[1] Vgl. BRÖSEL (2004), S. 518.

[2] Ein solcher Zwangswechsel ist beispielsweise beim Herausdrängen von Kleinaktionären aus einer Aktiengesellschaft gegeben.

[3] Vgl. MATSCHKE (1969), S. 66 ff., MATSCHKE (1971), S. 513.

[4] Vgl. HERING (1999).

[5] Vgl. im folgenden BAMBERG/COENENBERG (2000), S. 18 f., 44 f., 77 ff., 128 f. und 146, LAUX (2003), S. 22 f.

[6] Vgl. zu Zustandsbäumen sowie den alternativ einsetzbaren, umfangreicheren Entscheidungsbäumen BLOHM/LÜDER (1995), S. 280 ff., KLINGELHÖFER (2003), S. 284 ff., LAUX (2003), S. 291 ff.

[7] Für die Bewertung eines zu kaufenden Bewertungsobjekts bleibt dieses im Basisprogramm unberücksichtigt. Soll hingegen der Entscheidungswert des Verkaufs eines Bewertungsobjekts ermittelt werden, ist es zwar im Basis-, nicht aber im späteren Bewertungsprogramm enthalten.

mierung.[1] Die alternativ mögliche Einkommensstrommaximierung weist den enormen Nachteil auf, daß unter Unsicherheit der Zustand mit der geringsten Entnahme gleich einem Flaschenhals den Einkommensstrom begrenzt und so darüber hinausreichende Gelder in günstigeren Zuständen ungenutzt verfielen, also unbewertet blieben.[2] Die Entnahmen werden durch die Zahlungsreihen der Projekte k aller möglichen Projekte $\boldsymbol{K}$ multipliziert mit der jeweiligen Projektmenge x_k ermöglicht. Mindestens eines dieser Projekte muß die unbegrenzte Übertragung überschüssiger Liquidität in die jeweiligen Folgezustände zu einem nichtnegativen Habenzins ermöglichen.[3] Die speziellen Obergrenzen dieser „Übertragungsprojekte" sind demnach ausreichend hoch anzusetzen oder alternativ ganz zu eliminieren. In jedem Zustand ist die Liquidität abzusichern, da eine Zahlungsunfähigkeit die Einstellung jeder wirtschaftlichen Tätigkeit des Unternehmens zur Folge hat. Mit uz_s für die unabhängige Zahlung in einem Zustand s resultiert das folgende Basisprogramm:[4]

$$(1) \quad \max.\,\mathrm{GEN}; \quad \mathrm{GEN} := \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} gw_s \cdot EN_s$$

$$(2) \quad \text{u.d.N.} \quad -\sum_{\forall k \in \boldsymbol{K}} z_{k,s} \cdot x_k + EN_s \le uz_s \qquad \forall s \in \boldsymbol{S}$$

$$(3) \quad x_k \le x_k^o \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}$$

$$(4) \quad x_k, EN_s \ge 0 \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}, \forall s \in \boldsymbol{S}$$

Das duale Basisprogramm ergibt mit λ_s als Dualvariablen der primären Liquidationsnebenbedingungen und ξ_k als Dualvariablen der primalen Obergrenzen der Projekte folgende Struktur:

$$(5) \quad \min.\,\mathrm{WAR}; \quad \mathrm{WAR} := \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} uz_s \cdot \lambda_s + \sum_{\forall k \in \boldsymbol{K}} x_k^o \cdot \xi_k$$

$$(6) \quad \text{u.d.N.} \quad -\sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} z_{k,s} \cdot \lambda_s + \xi_k \ge 0 \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}$$

$$(7) \quad \lambda_s \ge gw_s \qquad \forall s \in \boldsymbol{S}$$

$$(8) \quad \lambda_s, \xi_k \ge 0 \qquad \forall s \in \boldsymbol{S}, \forall k \in \boldsymbol{K}$$

[1] Die Gewichtungsfaktoren können wahrscheinlichkeitstheoretisch unterlegt sein, müssen es aber explizit nicht sein. Sie können auch nur die Erwünschtheit einer Entnahme im jeweiligen Zustand wiedergeben. Vgl. KLINGELHÖFER (2003), S. 286 f. Der Wahl der Gewichtungsfaktoren kommt aber insofern eine sehr hohe Bedeutung zu, als daß sie eine der Hauptdeterminanten der endogenen Grenzzinssätze sind. Vgl. dazu HERING (2003), S. 206 ff.

[2] Vgl. KLINGELHÖFER (2003), S. 286, Fn. 25.

[3] Entweder gibt es die Möglichkeit, die überschüssige Liquidität in Form von Tagesgeldern zu einem sehr niedrigen Zinssatz oder im Zweifel durch profane Kassenhaltung zum Zinssatz von null zu übertragen. Einzelne Projekte können selbstverständlich auch Finanzierungsobjekte sein.

[4] Vgl. zur genaueren Modellbeschreibung KLINGELHÖFER (2003), S. 285 ff. und HERING (2003), S. 262 ff.

Gelten die folgenden Voraussetzungen für ökonomisch sinnvolle Probleme, so können die Dualvariablen der Liquiditätsrestriktion zur Ermittlung endogener Grenzzinssätze herangezogen werden:[1]

1. Es existiert eine Lösung des Primalproblems (bspw. bestehen keine exorbitanten Entnahmeforderungen).
2. Die Lösung ist endlich, und somit sind unendliche Arbitragegewinne ausgeschlossen.
3. Die Zielfunktion bewertet Zahlungsmittel in keinem Zustand mit 0, weil eine Anlage beliebiger Beträge zu einem nichtnegativen Habenzinssatz in jedem Zustand möglich ist.
4. Jedem im Zustand $s \in \boldsymbol{S}$ anfallenden Geldbetrag kommt über $\lambda_s > 0$ in einer Partialbetrachtung ein positiver Wert zu.

Aus den Dualwerten λ_s der Liquiditätsrestriktionen werden die zustandsbedingten Abzinsungsfaktoren $\rho_{s,\sigma}$ vom Zustand s auf den Zustand σ, sofern der jeweils spätere Zustand s aus dem früheren Zustand σ hervorgehen kann, ermittelt.[2] Unter Verwendung des zustandsbedingten Abzinsungsfaktors auf den Zeitpunkt 0 ergibt sich der Abzinsungsfaktor vom Zustand s auf diesen Zustand als:

$$(9) \quad \rho_{s,0} = \frac{\lambda_s}{\lambda_0}$$

Die dualen Nebenbedingungen (6), die sich auf die Projektobergrenzen beziehen, lassen sich umstellen und mit Hilfe der Gleichung (9) sowie der dualen Schlupfvariablen $dsl(x_k)$ als Kapitalwert interpretieren:

$$(10) \quad C_k = \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} z_{k,s} \cdot \rho_{s,0} \leq \frac{\xi_k}{\lambda_0} \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}$$

Der duale Schlupf dieser Restriktion, der aus der Ungleichung eine Gleichung macht, ist immer dann null, wenn das Projekt Teil der Basislösung ist. Der Kapitalwert entspricht bei vollständiger Durchführung des Projekts dem Wert der ausgeschöpften Obergrenze dividiert durch λ_0. Bei nicht vollständiger Projektdurchführung bis zur jeweiligen Obergrenze ist deren Dualvariable null, und somit ist dies auch der Kapitalwert eines solchen Grenzprojekts. Allerdings ist ein Kapitalwert von null auch bei entarteter Lösung möglich, weshalb keine eindeutige Aussage getroffen werden kann. Der Kapitalwert eines durchgeführten Projekts entspricht daher immer der mit den endogenen Abzinsungsfaktoren bewerteten Summe aller Projektzahlungen in allen Zuständen.

---

[1] Vgl. entsprechend zum Sicherheitsfall HERING (2003), S. 147 f. Die Voraussetzungen 3 und 4 implizieren, daß unter der gewählten Zielsetzung in keinem Zustand (und damit auch zu keinem Zeitpunkt) eine Geldvernichtung optimal sein kann.

[2] Vgl. LAUX (1971), S. 66 und 69 sowie KLINGELHÖFER (2003), S. 291. Dazu die analogen Ausführungen zum Sicherheitsfall in WEINGARTNER (1963), S. 171 f., HAX (1964), S. 439 ff., HAX (1985), S. 97 ff., FRANKE/LAUX (1968), S. 743 f., HERING (2003), S. 148 ff.

Wird eine Projekt nicht durchgeführt und ist daher nicht Teil der Basislösung, gleicht der duale Schlupf diese Summe zu null aus. Der Kapitalwert des Projekts ist dann also negativ.

Im Bewertungsprogramm tritt in einer Kaufsituation das Bewertungsobjekt mit seinen Zahlungen mz_s hinzu. Ein rational handelndes Subjekt wird sich durch die Hinzunahme des Bewertungsobjekts nicht schlechter stellen wollen als im Basisprogramm.[1] Daher muß einerseits die Summe der gewichteten Entnahmen des Bewertungsprogramms mindestens dem optimalen Zielfunktionswert GEN^{opt} des Basisprogramms entsprechen, andererseits ist der Entscheidungswert die Grenzzahlungsbereitschaft für das Bewertungsobjekt im Anfangszustand. Es wird vorausgesetzt, daß sich die Gewichtungsfaktoren der einzelnen Zustände nicht ändern. Die Zielfunktion des Bewertungsprogramms ist daher die Maximierung des Preises P, der in das positive, zu maximierende Ausgleichsangebot p_a und die negative, zu minimierende Ausgleichsforderung p_e aufgespaltet wird. Demnach resultiert das folgende Bewertungsprogramm:[2]

$$\text{(11)}\quad \max.P; \qquad P := p_a - p_e$$

$$\text{(12)}\quad \text{u.d.N.} \qquad -\sum_{\forall k \in \boldsymbol{K}} z_{k,0} \cdot x_k^b + EN_0^b + p_a - p_e \le uz_0 + mz_0$$

$$\text{(13)}\qquad -\sum_{\forall k \in \boldsymbol{K}} z_{k,s} \cdot x_k^b + EN_s^b \le uz_s + mz_s \quad \forall s \in \boldsymbol{S} \setminus 0$$

$$\text{(14)}\qquad -\sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} gw_s \cdot EN_s^b \le -GEN^{opt}$$

$$\text{(15)}\qquad x_k^b \le x_k^o \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}$$

$$\text{(16)}\qquad x_k^b, EN_s^b, p_a, p_e \ge 0 \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}, \forall s \in \boldsymbol{S}$$

Das duale Bewertungsprogramm lautet mit δ als Dualvariable der Mindestzielwertrestriktion:

$$\text{(17)}\quad \min.DP; \qquad DP := \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} \left(mz_s + uz_s\right) \cdot \lambda_s^b + \sum_{\forall k \in \boldsymbol{K}} x_k^o \cdot \xi_k^b - GEN^{opt} \cdot \delta$$

$$\text{(18)}\quad \text{u.d.N.} \qquad \lambda_0^b \ge 1$$

$$\text{(19)}\qquad -\lambda_0^b \ge -1$$

[1] Vgl. MATSCHKE (1975), S. 250 ff. Umgekehrt gilt in einer Verkaufssituation, daß das Objekt ausscheidet. Gleichwohl wird auch hier ein rationales Subjekt keine Verschlechterung gegenüber der Ausgangssituation hinnehmen. Obgleich sich das Modell formal für Kauf und Verkauf eignet, ist eine Modellierung nicht zugleich für beide Situationen möglich, da sich die hinzukommenden bzw. wegfallenden Zahlungsströme im Vorzeichen und oftmals auch betragsmäßig unterscheiden.

[2] Vgl. HERING (1999), S. 42 ff. und 54 ff.

(20) $\lambda_s^b - gw_s \cdot \delta \geq 0 \qquad \forall s \in \boldsymbol{S}$

(21) $-\sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} z_{k,s} \cdot \lambda_s^b + \xi_k^b \geq 0 \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}$

(22) $\lambda_s^b, \xi_k^b, \delta \geq 0 \qquad \forall k \in \boldsymbol{K}, \forall s \in \boldsymbol{S}$

Existiert eine optimale Lösung $DP^{opt} \neq 0$, so erzwingen die Nebenbedingungen (18) und (19) die Dualvariable $\lambda_0^b = 1$. Wegen der Komplementaritätsbeziehung $EN_s^b \cdot \left(\lambda_s^b - \delta \cdot gw_s\right) = 0$ zwischen primalem und dualem Bewertungsprogramm stellen sich die Abzinsungsfaktoren des Bewertungsprogramms in jedem Zustand mit positiven Entnahmen wie folgt dar:

(23) $\rho_{s,0}^b = \lambda_s^b \quad$ sowie $\quad \rho_{s,0}^b = gw_s \cdot \delta \quad \forall s \in \boldsymbol{S}$ mit $EN_s^b > 0$

Das Dualitätstheorem der linearen Optimierung besagt, daß im Falle einer zulässigen Lösung des Primal- und Dualproblems beide eine optimale Lösung besitzen und ihre optimalen Zielfunktionswerte gleich sind.[1] Deshalb ergibt sich mit (23) und wegen $\xi_k^b = C_k^b$ für Projekte mit positivem Kapitalwert folgendes Preisfunktional:

(24) $p_a^{opt} - p_e^{opt}$

$$= \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} mz_s \cdot \rho_{s,0}^b + \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} uz_s \cdot \rho_{s,0}^b + \sum_{\forall \xi_k^b > 0} x_k^o \cdot \xi_k^b - GEN^{opt} \cdot \delta$$

$$= \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} mz_s \cdot \rho_{s,0}^b + \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} uz_s \cdot \rho_{s,0}^b + \sum_{\forall K_k^b > 0} x_k^o \cdot C_k^b - \sum_{\forall EN_s^b > 0} EN_s^b \cdot \rho_{s,0}^b$$

Diese Preisgleichung enthält im ersten Summenterm den Kapitalwert der Zahlungsreihe des zu bewertenden Objekts. In den zwei folgenden Summentermen wird der Kapitalwert des Bewertungsprogramms ohne Bewertungsobjekt angegeben. Von diesen Termen wird der Kapitalwert eines dem Basisprogramm gleichwertigen Ausschüttungsplans abgezogen.[2]

Diese Interpretation fällt für den letzten Term recht knapp aus. Eine genauere Untersuchung dieses Zusammenhangs und die Ableitung entsprechender Interpretationen erfolgt im nächsten Kapitel.

[1] Vgl. die einschlägige OR-Literatur, z. B. GAL (1989), S. 92 ff., HILLIER/LIEBERMANN (1997), S. 128 ff.

[2] Vgl. HERING (1999), S. 45.

3 Programmübergreifende Diskontierungswirkung der Dualvariable der Mindestzielwertrestriktion

Der in der Gleichung (24) enthaltene letzte Term $-GEN^{opt} \cdot \delta$ bedarf einer näheren Untersuchung. Im Falle einer nichtentarteten Lösung läßt sich die Dualvariable durch Umstellung von Gleichung (23) substituieren, wenn in einem Zustand $\hat{s}$ eine Entnahme getätigt wird. Bei einer optimalen Lösung muß dies wegen Restriktion (14) des Bewertungsprogramms für mindestens einen Zustand zutreffen, wenn der Zielfunktionswert des Basisprogramms größer null war. Dann gilt:

$$(25) \quad \delta = \frac{\rho^b_{\hat{s},0}}{gw_{\hat{s}}} = \frac{\lambda^b_{\hat{s}}}{gw_{\hat{s}}}$$

Es sei nun zunächst vorausgesetzt, daß in genau diesem Zustand auch im Basisprogramm eine Entnahme getätigt wird. Es gilt wegen der stets scharfen Liquiditätsnebenbedingungen, daß Restriktion (7) des Basisprogramms als Gleichung erfüllt ist:

$$(26) \quad \lambda_{\hat{s}} = gw_{\hat{s}}$$

Die Dualvariable δ ist demnach:

$$(27) \quad \delta = \frac{\lambda^b_{\hat{s}}}{\lambda_{\hat{s}}}$$

Daher läßt sich der letzte Term des Preisfunktionals (24) wie folgt umstellen:

$$(28) \quad -GEN^{opt} \cdot \delta = -\frac{\lambda^b_{\hat{s}}}{\lambda_{\hat{s}}} \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} gw_s \cdot EN_s = -\lambda^b_{\hat{s}} \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \frac{gw_s}{gw_{\hat{s}}}$$

Im Falle einer positiven Entnahme im Basisprogramm im Zustand s ist wegen des komplementären Schlupfes $\lambda_s = gw_s$. Die Division der Gewichtungsfaktoren läßt sich demnach als Quotient der Dualvariablen der Liquiditätsrestriktionen interpretieren. Selbst dann, wenn in einem Zustand keine Entnahme stattfindet, ist die in diesem Falle eigentlich unzulässige Substitution unproblematisch, da das Produkt aus Quotient und Entnahme den Wert null annimmt. Da $\lambda^b_0 = 1$ ist, verändert eine Division durch diese Variable nicht den Wert des Terms, sehr wohl aber seinen Interpretationsgehalt, denn es ist dann unter Beachtung von Gleichung (26): [1]

$$(29) \quad -GEN^{opt} \cdot \frac{\delta}{\lambda^b_0} = -\frac{\lambda^b_{\hat{s}}}{\lambda^b_0} \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \frac{\lambda_s}{\lambda_{\hat{s}}} = -\rho^b_{\hat{s},0} \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \rho_{s,\hat{s}}$$

Demnach werden die Entnahmen im Basisprogramm auf den Zustand $\hat{s}$ auf- oder abgezinst und summiert. Von diesem Zustand aus werden sie im

[1] Eine ähnliche Gleichung findet sich als „komplexe Bewertungsformel“, gleichwohl nicht mit dieser Interpretation, bereits bei LAUX/FRANKE (1969), S. 217 im Rahmen der Einkommensmaximierung unter Sicherheit.

Bewertungsprogramm auf den Anfangszustand diskontiert. Daher besitzt δ eine programmübergreifende Diskontierungs- und Bewertungsfunktion. Die Entnahmen des Basisprogramms, bewertet mit den dort geltenden Zinssätzen, werden durch diese Dualvariable für das Bewertungsprogramm und die dort geltenden Grenzverwendungen des Geldes „umbewertet".

Die HERINGsche Interpretation eines dem Basisprogramm gleichwertigen Ausschüttungsplans im Bewertungsprogramm läßt sich außerdem dahingehend verfeinern, daß *die Summe der diskontierten Entnahmen im Basisprogramm der des Bewertungsprogramms im Zustand* $\hat{s}$ *genau entsprechen muß*,[1] denn es gilt:

$$(30) \quad \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s^b \cdot \rho_{s,0}^b = \rho_{\hat{s},0}^b \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \rho_{s,\hat{s}}$$

Werden die Entnahmen des Bewertungsprogramms zunächst auf den Zustand $\hat{s}$ auf- oder abgezinst und summiert sowie anschließend diese Summe wieder in den Zustand 0 diskontiert, so ergibt sich:

$$(31) \quad \rho_{\hat{s},0}^b \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s^b \cdot \rho_{s,\hat{s}}^b = \rho_{\hat{s},0}^b \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \rho_{s,\hat{s}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s^b \cdot \rho_{s,\hat{s}}^b = \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \rho_{s,\hat{s}}$$

Weiterhin ist es möglich, die Entnahmen im Basisprogramm auch gleich auf den Zustand 0 zu diskontieren. Dazu muß nur in beiden Programmen $\rho_{s,\hat{s}}$ in $\rho_{s,0} \cdot \rho_{0,\hat{s}}$ aufgespaltet werden. Somit ist dann:

$$(32) \quad \rho_{0,\hat{s}}^b \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s^b \cdot \rho_{s,0}^b = \rho_{0,\hat{s}} \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \rho_{s,0} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s^b \cdot \rho_{s,0}^b = \frac{\rho_{0,\hat{s}}}{\rho_{0,\hat{s}}^b} \cdot \sum_{\forall s \in \boldsymbol{S}} EN_s \cdot \rho_{s,0}$$

Die in den Zustand null diskontierten Entnahmen in den jeweiligen Programmen werden demnach durch die programmspezifischen endogenen Grenzzinssätze in den Zustand $\hat{s}$ aufgezinst, in dem sie sich laut (31) entsprechen müssen. Die Umstellung der Gleichung führt zu einem Korrekturfaktor für den jeweiligen Wert der Entnahmen im Basis- oder Bewertungsprogramm. Ist hingegen Zustand null ohnehin ein Kopplungszustand $\hat{s}$, so nimmt der Korrekturfaktor den Wert 1 an, weil sich dann die Diskontierungsfaktoren in beiden Programmen entsprechen müssen. Schließlich muß auch im Kopplungszustand null Gleichung (31) erfüllt sein.

Daher ist zusätzlich die Schlußfolgerung zu ziehen, daß die Auf- und Abzinsungsfaktoren (trotz i. a. unterschiedlicher Dualwerte der Liquiditätsrestriktionen) von einem Kopplungszustand $\hat{s}$ in einen anderen Kopplungszustand $\tilde{s}$ im Basis- und Bewertungsprogramm gleich sein müssen.

[1] Vgl. HERING (1999), S. 45.

4 Zusammenfassender Ausblick

Als Ziel dieses Arbeitsberichts wurde eingangs die genauere Interpretation der Dualvariable der Mindestzielwertrestriktion im Bewertungsprogramm nach dem Zustandsgrenzpreismodell zur Ermittlung des Entscheidungswerts postuliert. Anhand der im Optimum von Basis- und Bewertungsprogramm geltenden Komplementaritätsbeziehungen konnte dies erreicht werden. Ferner wurde nicht nur gezeigt, daß die Dualvariable eine programmübergreifende Diskontierungs- und Bewertungsfunktion übernimmt, sondern auch, daß im Optimum des Bewertungsprogramms der Zielfunktionswert des Basisprogramms genau erfüllt ist. Ein über diesem Mindestwert hinausgehender Wert der Bewertungsprogrammentnahmen ist unter Beachtung des zu maximierenden Preises auch nicht sinnvoll. Jede verfügbare Geldeinheit, die nicht zur Sicherstellung des alten Zielwerts benötigt wird, muß in die Grenzzahlungsbereitschaft fließen. Außerdem konnte nachgewiesen werden, daß in den Zuständen, in denen im Basis- und im Bewertungsprogramm Entnahmen stattfinden, die Auf- und Abzinsungsfaktoren zwischen diesen Kopplungszuständen in beiden Programmen gleich sind.

Ein Anknüpfungspunkt für weitere Forschungen ergibt sich durch die Untersuchung kombinierbarer, voneinander unabhängiger Bewertungsobjekte.[1] Dafür wären dann Alternativbewertungsprogramme aufzustellen, in denen jeweils „Bewertungsobjekt-bündel" aus einem oder mehreren Bewertungsobjekten untersucht werden. Hierbei lassen sich die unterschiedlichen Grenzzahlungsbereitschaften in Abhängigkeit zur gewählten Teilobjektreihenfolge untersuchen, wenngleich der Wert aller Bewertungsobjekte zusammengefaßt zu einem einzigen „Gesamtobjekt" unverändert bleiben muß. Die Interpretation der verschiedenen δ der Bewertungsprogramme und ihre Beziehungen untereinander können der Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

[1] Vgl. zum in diesem Zusammenhang zu nennenden Begriff der verbundenen oder jungierten Konfliktsituation MATSCHKE (1975), S, 35.

Literaturverzeichnis

BAMBERG, G., COENENBERG, A. G. (2000): Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 10. Aufl., München 2000.

BLOHM, H., LÜDER K. (1995): Investition. Schwachstellenanalyse des Investitionsbereichs und der Investitionsrechnung, 8. Aufl., München 1995.

BRÖSEL, G. (2004): Die Argumentationsfunktion in der Unternehmensbewertung – „Rotes Tuch“ oder „Blaues Band“ für Wirtschaftsprüfer?, in: BRÖSEL, G., KASPERZAK, R. (Hrsg.): Internationale Rechnungslegung, Prüfung und Analyse, München/Wien 2004.

FRANKE, G., LAUX, H. (1968): Die Ermittlung der Kalkulationszinsfüße für investitionstheoretische Partialmodelle, in: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 20. Jg., S. 740-759.

GAL, T. (1989): Lineare Optimierung, in: GAL, T. (Hrsg.), Grundlagen des Operations Research, Bd. 1, 2. Aufl., Berlin et al. 1989, S. 56-254.

HAX, H. (1964): Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, in: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 16. Jg., S. 430-446.

HAX, H. (1985), Investitionstheorie, 5. Aufl., Heidelberg, 1985.

HERING, T. (1999): Finanzwirtschaftliche Unternehmensbewertung, Wiesbaden 1999.

HERING, T. (2003): Investitionstheorie, 2. Aufl., München/Wien 2003.

HILLIER, F. S., LIEBERMANN, G. J. (1997): Operations Research, 5. Aufl., München/Wien 1997.

JAENSCH, G. (1966a): Wert und Preis der ganzen Unternehmung, Köln et al. 1966.

JAENSCH, G. (1966b): Ein einfaches Modell der Unternehmungsbewertung ohne Kalkulationszinsfuß. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 18 Jg., S. 660-679.

KLINGELHÖFER, H. E. (2003): Investitionsbewertung auf unvollkommenen Kapitalmärkten unter Unsicherheit, in: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 55 Jg., S. 279-305.

LAUX, H. (1971): Flexible Investitionsplanung, Opladen 1971.

LAUX, H. (2003): Entscheidungstheorie, 5. Aufl., Berlin et al. 2003.

LAUX, H., FRANKE, G. (1969): Zum Problem der Bewertung von Unternehmungen und anderen Investitionsgütern, in: Unternehmensforschung, 13. Jg., S. 205-223.

MATSCHKE, M. J. (1969): Der Kompromiß als betriebswirtschaftliches Problem bei der Preisfestsetzung eines Gutachters im Rahmen der Unternehmensbewertung, in: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung,, 21. Jg., S. 57-77.

MATSCHKE, M. J. (1971): Der Arbitrium- oder Schiedsspruchwert, in: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 23. Jg., S. 508-520.

MATSCHKE, M. J (1972): Der Gesamtwert der Unternehmung als Entscheidungswert, in: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 24. Jg., S. 146-161.

MATSCHKE, M. J. (1975): Der Entscheidungswert der Unternehmung, Wiesbaden 1975.

MATSCHKE, M. J. (1976): Der Argumentationswert der Unternehmung, in: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 28. Jg., S. 517-524.

MATSCHKE, M. J. (1995): Unternehmensbewertung: Anlässe und Konzeptionen, in: CORSTEN, H. (Hrsg.): Lexikon der Betriebswirtschaftslehre, 3. Aufl., München/Wien 1995.

WEINGARTNER, H. M. (1963): Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, 1. Aufl., Englewood Cliffs 1963.

Hinweise zu den Autoren

Dipl.-Kfm. Michael Lerm ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, E-Post: michael.lerm@uni-greifswald.de.

Dipl.-Wirtsch.-Ing. Stefan Mirschel ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, E-Post: stemi@uni-greifswald.de.