

Parametrische Approximation der impliziten Volatilitätsoberfläche

Isabel Stein*

2015

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden Parametrisierungen zur Approximation der impliziten Volatilitätsoberfläche untersucht. Die implizite Volatilität wird sowohl durch das SABR-Modell als auch durch die SVI-Parametrisierung für verschiedene Ausübungspreise approximiert. Anschließend wird diesen Funktionen mit Hilfe von GARCH-Modellen eine Zeitstruktur gegeben. Zudem werden die Modelle mit einem zusammengesetzten Poisson-Prozess kombiniert. Die resultierende Form ist eine explizite Darstellung der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von der Restlaufzeit. Abschließend werden die verschiedenen Modelle an reale Daten angepasst und mit dem Heston-Modell verglichen.

Schlüsselbegriffe: GARCH-Modelle; zusammengesetzter Poisson-Prozess; implizite Volatilitätsoberfläche.

JEL Class.: C58, G13.

1 Einleitung

Black und Scholes (1973) und Merton (1973) entwickelten ein Modell zur arbitragefreien Bewertung von Optionen. Durch dieses Modell ist es ebenfalls möglich bei gegebenem Optionspreis die implizite Volatilität zu berechnen. Empirische Beobachtungen zeigen, dass die implizite Volatilität für Optionen „im Geld“ oder „aus dem Geld“ höher ist als für Optionen „am Geld“. Die Abbildung der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von der logarithmierten forward moneyness stellt für kurze Laufzeiten (maximal drei Monate) eine U-förmige Kurve dar. Der Kurvenverlauf wird auch als „Volatility-Smile“ bezeichnet. Folglich ist die Volatilität entgegen der Annahme von Black, Scholes und Merton nicht konstant.

*Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für ABWL und Finanzwirtschaft, insb. Unternehmensbewertung (Univ.-Prof. Dr. Thomas Mazzoni) der Universität Greifswald. Tel.: 03834 862495, Email: Isabel.Stein@uni-greifswald.de

Eine erweiterte Bewertungsmethode liefert das Sprungdiffusionsmodell von Merton (1976). Durch die Einbindung eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses ist es möglich den „Smile“-Effekt darzustellen. Allerdings ist die Approximation für längere Laufzeiten ungenau, da dieses Modell den „Leverage“-Effekt sowie das „Volatilitäts-Clustering“ nicht nachbilden kann. Mit der Integration stochastischer Volatilität befassten sich beispielsweise Hull und White (1987). In ihrem Optionspreismodell verliehen sie der Volatilität die Struktur einer geometrischen *Brownschen* Bewegung. Allerdings gestattet dieses Modell in der Regel nur numerische Lösungen. Bei Stein und Stein (1991) sowie Heston (1993) folgt die Volatilität einem abgewandelten *Ornstein-Uhlenbeck*-Prozess. Beide Modelle bieten eine geschlossene Bewertungsformel und eignen sich vorwiegend für Volatilitäten die über eine längere Laufzeit betrachtet werden.

Neben den aufgeführten unvollständigen Marktmodellen ermöglichen deterministische Volatilitätsmodelle von Derman und Kani (1994) und Dupire (1994) die Ermittlung der lokalen Volatilität. Diese Modelle sind vollständig und darüber hinaus kann die Dupire-Gleichung in Abhängigkeit der impliziten Volatilität ausgedrückt werden. Folglich wird nur die Approximation der impliziten Volatilitätsoberfläche benötigt, da die Dupire-Gleichung sofortigen Zugriff auf die lokale Volatilitätsoberfläche erlaubt. Ein ausführlicher Zusammenhang zwischen lokaler, stochastischer und impliziter Volatilität wird in Gatheral (2006) gegeben.

Mit einer geschlossenen, algebraischen Formel bieten Hagan et al. (2002) sowie Gatheral (2004) eine weitere Methode zur Berechnung der impliziten Volatilität. Mit Hilfe dieser Funktionen wird die Volatilität für jeden beliebigen und vorhandenen Datenzeitpunkt approximiert. Die Volatilität zwischen diesen Zeitpunkten kann durch Interpolation bestimmt werden. Allerdings werden dadurch Calendar Spreads möglich, die zu nicht arbitragefreien Situationen führen können. Eine Alternative zur Interpolation ist die Ergänzung der Parametrisierungen, der ersten Zeitscheibe, durch eine Zeitstruktur.

In diesem Artikel werden zuerst sowohl die Parameter des SABR-Modells von Hagan et al. als auch die der SVI-Parametrisierung von Gatheral für die erste Zeitscheibe des Datensatzes geschätzt. Anschließend wird diesen Funktionen mit Hilfe von GARCH-Modellen eine Zeitstruktur verliehen, um eine geschlossene Form für die implizite Volatilitätsoberfläche zu erhalten. Diese Idee ist auf die Arbeiten von Ho und Lee (1986) und Vasicek (1977) zurückzuführen. In ihren Artikeln untersuchen sie die Entwicklung von Zinsstrukturen und approximieren diese, indem sie einer Ausgangsfunktion Zeitstruktur verleihen. Zeitdiskrete GARCH-Modelle wurden von Bollerslev (1986) entwickelt und stellen eine Verallgemeinerung der ARCH-Modelle, vorgeschlagen von Engle (1982) dar. GARCH steht für „Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity“ (verallgemeinerte autoregressive bedingte Heteroskedastizität). Diese Modelle dienen der Analyse (bedingt) heteroskedastischer Zeitreihen. Zudem wird, aufbauend auf den Arbeiten von Chan und Maheu (2002), ein Sprungprozess in Form eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses in die GARCH-Modelle integriert.

Der Artikel ist in fünf Abschnitte gegliedert. Im 2. Abschnitt wird ein parametrisches Approximationsmodell der impliziten Volatilität mit Hilfe des AGARCH-Modells in Kombination mit einem Sprungprozess erstellt. Eine analoge Untersuchung hinsichtlich des

TGARCH-Modells erfolgt im 3. Abschnitt. Die verwendeten Parametrisierungen für die erste Zeitscheibe werden im 4. Abschnitt vorgestellt und in die oben entwickelten Modelle integriert, sowie auf die Daten des Deutschen Aktienindex angewendet. Im 5. Abschnitt werden die ermittelten Ergebnisse zusammengefasst.

2 Parametrisierung durch AGARCH(1,1)-Modell mit Sprungprozess

Der Preisprozess S_t eines Wertpapiers folgt im verallgemeinerten *Black-Scholes*-Modell einer geometrischen *Brownschen* Bewegung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t) S_t dW_t \quad (1)$$

mit dem Erwartungswert μ und dem Wiener-Prozess W_t . Die Volatilität $\sigma(t)$ ist eine zeitabhängige deterministische Funktion. Nach dem Theorem von *Girsanov* muss die Drift μ beim Übergang zum risikoneutralen Bewertungsmaß durch die risikofreie Zinsrate r ersetzt werden. Die *Black-Scholes*-Differentialgleichung lautet

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (2)$$

wobei V für „Value“ steht. Die Lösung für eine europäische Plain Vanilla Call Option ist

$$C_t(K, T) = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2) \quad (3)$$

mit

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + r(T-t) + \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s) ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}. \quad (4)$$

Die implizite Volatilität $\sigma_{\text{imp.}}$ entspricht derjenigen Volatilität die nach dem *Black-Scholes*-Modell vorliegen muss, damit der am Markt vorherrschende Optionspreis erklärt wird. $\sigma_{\text{imp.}}$ hat die Form

$$\sigma_{\text{imp.}}(T) = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds}. \quad (5)$$

Die Volatilität im traditionellen *Black-Scholes*-Modell wird als konstant angenommen, was nicht der Realität entspricht. Eine bessere Möglichkeit Volatilitäten zu approximieren bieten ARCH/GARCH-Modelle nach Engle (1982) und Bollerslev (1986). Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Varianz des Preisprozesses in einer expliziten Form darzustellen um daraus die implizite Volatilität berechnen zu können. Sei $x_t = \log(S_t)$ der logarithmierte Preis eines Wertpapiers und $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ die logarithmierte Rendite mit

$$\Delta x_t = r + \sqrt{h_t} z_t, \quad (6)$$

wobei $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Die diskrete Rendite Δx_t ist bedingt normalverteilt mit Erwartungswert r und Varianz h_t , für h_t \mathcal{F}_{t-1} -messbar. Für die kommenden Untersuchungen wird h_t die Struktur eines AGARCH(1,1)-Modells (Asymmetrisch GARCH) nach Engle (1990) gegeben

$$h_t = \omega + \alpha(\epsilon_{t-1} - \gamma)^2 + \beta h_{t-1}, \quad (7)$$

mit $\epsilon_t = \sqrt{h_t} z_t$ und $\omega, \alpha, \beta > 0$ sowie $\alpha + \beta < 1$. Diese Bedingungen gewährleisten die Stationarität des Prozesses, um spätere Berechnungen durchführen zu können. Desweiteren gilt $\text{Var}[\epsilon_t] = E[\epsilon_t^2] - E[\epsilon_t]^2 = E[(\sqrt{h_t} z_t)^2] = E[h_t]$, da z_t und h_t unabhängig sind, faktorisieren beide Zufallsvariablen.

Weiterhin können bei der Betrachtung von Preisprozessen gelegentlich Sprünge beobachtet werden. Diese sollen ebenfalls integriert werden, in dem das AGARCH(1,1)-Modell um einen zusammengesetzten Poisson-Prozess mit stochastischer Sprungintensität λ_t ergänzt wird. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= r + \epsilon_t = r + \sqrt{h_t} z_t + \sum_{j=0}^{N_t} y_{j,t} - \mu_s \lambda_t, \\ y_{j,t} &\sim \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s^2), \quad N_t \sim \text{Poi}(\lambda_t). \end{aligned} \quad (8)$$

Der Sprungprozess $y_{j,t}$ ist unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert μ_s und Varianz σ_s^2 . N_t ist eine Poisson-verteilte Zufallsvariable und gibt die Anzahl der Sprünge zwischen t und $t-1$ wieder, mit der bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(N_t = j | \mathcal{F}_{t-1}) = e^{-\lambda_t} \frac{\lambda_t^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Durch diese Annahme wird das Modell um zusätzliche Parameter ergänzt, damit die Approximation der Volatilität präziser wird. Nach dem Ansatz von Chan und Maheu (2002) folgt λ_t einem ARMA(1,1)-Modell (AutoRegressive Moving Average). Sei $\lambda_t = E[N_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ der \mathcal{F}_{t-1} messbare, bedingte Erwartungswert des Zählprozesses N_t , mit

$$\lambda_t = \eta + \rho \lambda_{t-1} + \nu \xi_{t-1}, \quad (10)$$

wobei $\xi_t = E[N_t | \mathcal{F}_t] - \lambda_t$ einen Zufallsfehler darstellt und $E[\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[E[N_t | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_{t-1}] - \lambda_t = 0$. Die Ermittlung des Erwartungswertes von λ_t beschränkt sich auf die ersten beiden Summanden und es ergibt sich folgende Rekursion

$$\begin{aligned} E[\lambda_t] &= \eta + \rho E[\lambda_{t-1}] \\ &= \eta \sum_{k=0}^{t-1} \rho^k + \rho^t E[\lambda_0] \\ &= \eta \cdot \frac{1 - \rho^t}{1 - \rho} + \rho^t \lambda_0 \\ &= \lambda_\infty + \rho^t \lambda_0, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\lambda_t] = \frac{\eta}{1-\rho} = \lambda_\infty$ für $|\rho| < 1$ und $x = (\lambda_0 - \lambda_\infty)$.

Unter Zuhilfenahme der expliziten Form von $E[\lambda_t]$ wird die Sprungintensität in das Modell integriert und für h_t folgt

$$E[h_t] = \omega + \alpha\gamma^2 + \alpha E[\epsilon_{t-1}^2] - 2\alpha\gamma E[\epsilon_{t-1}] + \beta E[h_{t-1}]. \quad (12)$$

Der Erwartungswert $E[\epsilon_t] = E[E[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]]$ setzt sich zusammen aus der Summe des Erwartungswertes von $\sqrt{h_t} z_t$, der null beträgt, da z_t standardnormalverteilt ist, dem des Sprungprozesses und des Kompensators. Daraus ergibt sich $E[\epsilon_t] = 0$. Der Beweis befindet sich im Anhang A. Der Erwartungswert $E[\epsilon_t^2]$ entspricht nach dem Verschiebungssatz der Varianz von ϵ_t der gesuchten Varianz $\text{Var}[\epsilon_t]$,

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\epsilon_t^2] - E[\epsilon_t]^2 = E[\epsilon_t^2] - 0.$$

Mit Hilfe der Varianzzerlegung beträgt

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[h_t + \lambda_t(\mu_s^2 + \sigma_s^2)] = E[h_t] + E[\lambda_t](\mu_s^2 + \sigma_s^2), \quad (13)$$

siehe Anhang B und der Erwartungswert von ϵ_{t-1}^2 ist folglich

$$E[\epsilon_{t-1}^2] = E[h_{t-1}] + E[\lambda_{t-1}](\mu_s^2 + \sigma_s^2). \quad (14)$$

Für die Berechnung des Erwartungswertes von h_t werden die Gleichungen (11) und (14) in die Gleichung (12) eingesetzt und Reihenentwicklungen durchgeführt,

$$\begin{aligned} E[h_t] &= \omega + \alpha(\gamma^2 + (\mu_s^2 + \sigma_s^2)(\lambda_\infty + x\rho^{t-1})) + (\alpha + \beta)E[h_{t-1}] \\ &= \underbrace{\omega + \alpha(\gamma^2 + (\mu_s^2 + \sigma_s^2)\lambda_\infty)}_{a_0} + \underbrace{\alpha(\mu_s^2 + \sigma_s^2)x\rho^{t-1}}_{a_1} + \underbrace{(\alpha + \beta)}_b E[h_{t-1}] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{t-1} b^n + a_1 \sum_{n=0}^{t-1} b^n \rho^{t-1-n} + b^t E[h_0] \\ &= a_0 \cdot \frac{1-b^t}{1-b} + a_1 \frac{\rho^t - b^t}{\rho - b} + b^t h_0 \\ &= \frac{a_0}{1-b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1-b} - \frac{a_1}{\rho - b} \right) b^t + \frac{a_1}{\rho - b} \rho^t \end{aligned} \quad (15)$$

mit $a_0 = \omega + \alpha(\gamma^2 + (\mu_s^2 + \sigma_s^2)\lambda_\infty)$, $a_1 = \alpha(\mu_s^2 + \sigma_s^2)x$ und $b = \alpha + \beta$, wobei $|b| < 1$.

Dieses Ergebnis (15) und die rekursive Form (11) in Gleichung (13) eingesetzt, liefert die Varianz des Preisprozesses

$$\text{Var}[\epsilon_t] = \frac{a_0}{1-b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1-b} - \frac{a_1}{\rho - b} \right) b^t + \left(\frac{a_1}{\rho - b} + x\kappa \right) \rho^t + \lambda_\infty \kappa, \quad (16)$$

mit $\kappa = \mu_s^2 + \sigma_s^2$.

Zur Darstellung der impliziten Volatilität wie in Gleichung (5) wird die Entwicklung von geometrischen Reihen genutzt. Triviales Umformen liefert eine explizite Form

$$\sigma_{\text{imp.}}(T) = \sqrt{c_0 + \frac{1}{T+1} \left((h_0 - c_0 - c_1) \frac{1 - b^{T+1}}{1 - b} + (c_1 + x\kappa) \frac{1 - \rho^{T+1}}{1 - \rho} \right) + \lambda_\infty \kappa}. \quad (17)$$

mit $c_0 = \frac{a_0}{1-b}$, $c_1 = \frac{a_1}{\rho-b}$ und $h_0 = \sigma_0^2 - \lambda_0 \kappa$.

2.1 Spezialfall: deterministische Sprungintensität

In diesem Abschnitt wird ein Spezialfall des Sprungprozesses betrachtet, der ebenfalls im 4. Abschnitt an realen Daten getestet wird. Ziel ist es zu untersuchen ob und welche Sprungintensität (stochastisch oder deterministisch) zu einer wesentlichen Verbesserung der Approximation der Volatilitätsoberfläche führt.

Die Zeitstruktur der stochastischen Sprungintensität λ_t entfällt, um eine deterministische Sprungintensität λ_0 zu erhalten. Der Erwartungswert von ϵ_t ändert sich nicht, allerdings dessen Varianz

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[h_t + \lambda_0(\mu_s^2 + \sigma_s^2)] = E[h_t] + \lambda_0(\mu_s^2 + \sigma_s^2), \quad (18)$$

und somit auch der Erwartungswert von h_t

$$\begin{aligned} E[h_t] &= \omega + \alpha(\gamma^2 + \lambda_0(\mu_s^2 + \sigma_s^2)) + (\alpha + \beta)E[h_{t-1}] \\ &= \frac{a_0}{1-b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1-b} \right) b^t \end{aligned} \quad (19)$$

mit $a_0 = \omega + \alpha(\gamma^2 + \lambda_0 \kappa)$. Für die implizite Volatilität ergibt sich

$$\sigma_{\text{imp.}}(T) = \sqrt{c_0 + \frac{1}{T+1} (h_0 - c_0) \frac{1 - b^{T+1}}{1 - b} + \lambda_0 \kappa}. \quad (20)$$

Diese Form kann erreicht werden, indem die Parameter aus Gleichung (17) $\rho = 0$ und $\lambda_0 = \eta$ gesetzt werden, wobei $h_0 = \sigma_0^2 - \lambda_0 \kappa$ entspricht.

2.2 Spezialfall: Modell ohne Sprungprozess

Der zweite Spezialfall liegt der Annahme zu Grunde, dass kein Sprung stattfindet. Der Erwartungswert von ϵ_t ändert sich auch diesmal nicht. Folglich ist der Erwartungswert unabhängig vom Sprungprozess. Die Varianz hat in diesem Fall die Form

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[h_t], \quad (21)$$

und daher ergibt sich für dem Erwartungswert von h_t

$$\begin{aligned} E[h_t] &= \omega + \alpha\gamma^2 + (\alpha + \beta)E[h_{t-1}] \\ &= \frac{a_0}{1-b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1-b} \right) b^t \end{aligned} \quad (22)$$

mit $a_0 = \omega + \alpha\gamma^2$. Die implizite Volatilität wird dargestellt als

$$\sigma_{\text{imp.}}(T) = \sqrt{c_0 + \frac{1}{T+1} (h_0 - c_0) \frac{1 - b^{T+1}}{1 - b}}. \quad (23)$$

wobei $h_0 = \sigma_0^2$. Diese Form kann erlangt werden, indem die Parameter aus Gleichung (17) $\rho = 0$ und $\lambda_0 = \eta = 0$, gesetzt werden.

3 Parametrisierung durch TGARCH(1,1)-Modell mit Sprungprozess

In diesem Abschnitt wird dieselbe Vorgehensweise wie in Abschnitt 2 gewählt, basierend auf einem TGARCH(1,1)-Modell (Threshold GARCH) nach Glosten et al. (1993). Sei die diskrete Rendite $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ und

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= r + \epsilon_t = r + \sqrt{h_t} z_t + \sum_{j=0}^{N_t} y_{j,t} - \mu_s \lambda_t, \\ y_{j,t} &\sim \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s^2), \quad N_t \sim \text{Poi}(\lambda_t). \end{aligned}$$

definiert wie in Gleichung (8) mit $\omega, \alpha, \beta > 0$ sowie $\alpha + \beta < 1$ und

$$h_t = \omega + (\alpha + \gamma d_{t-1}) \epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (24)$$

mit

$$d_t = \begin{cases} 0, & \text{für } \epsilon_t \geq 0, \\ 1, & \text{für } \epsilon_t < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Wobei d_t eine Indikatorvariable darstellt, um den Einfluss der negativen und positiven Renditen zu differenzieren. Wenn z_t als standardnormalverteilt angenommen wird, ist ϵ_t normalverteilt mit Erwartungswert null und d_t *Bernoulli*-verteilt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 50\%$.

λ_t folgt wieder einem ARMA(1,1)-Modell und $\lambda_t = E[N_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ entspricht dem \mathcal{F}_{t-1} messbaren, bedingten Erwartungswert des Zählprozesses N_t , mit

$$\lambda_t = \eta + \rho \lambda_{t-1} + \nu \xi_{t-1}, \quad (26)$$

wobei $\xi_t = E[N_t | \mathcal{F}_t] - \lambda_t$ einen Zufallsfehler darstellt und $E[\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[E[N_t | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_{t-1}] - \lambda_t = 0$. Der Erwartungswert von λ_t ist wieder

$$E[\lambda_t] = \lambda_\infty + x \rho^t,$$

wobei $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\lambda_t] = \frac{\eta}{1-\rho} = \lambda_\infty$ für $|\rho| < 1$ und $x = (\lambda_0 - \lambda_\infty)$.

Unter Zuhilfenahme der expliziten Form von $E[\lambda_t]$ wird die Sprungintensität in das Modell integriert und für h_t folgt

$$E[h_t] = \omega + (\alpha + 0.5\gamma)E[\epsilon_{t-1}^2] + \beta E[h_{t-1}]. \quad (27)$$

Der Erwartungswert $E[\epsilon_t^2]$ entspricht nach dem Verschiebungssatz der Varianz von ϵ_t der gesuchten Varianz $\text{Var}[\epsilon_t]$,

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\epsilon_t^2] - E[\epsilon_t]^2 = E[\epsilon_t^2] - 0.$$

Mit Hilfe der Varianzzerlegung beträgt die Varianz wieder

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[h_t + \lambda_t(\mu_s^2 + \sigma_s^2)] = E[h_t] + E[\lambda_t](\mu_s^2 + \sigma_s^2),$$

siehe Anhang B und der Erwartungswert von ϵ_{t-1}^2 ist folglich

$$E[\epsilon_{t-1}^2] = E[h_{t-1}] + E[\lambda_{t-1}](\mu_s^2 + \sigma_s^2).$$

Für die Berechnung des Erwartungswertes von h_t werden die Gleichungen (11) und (14) in die Gleichung (27) eingesetzt und Reihenentwicklungen durchgeführt,

$$\begin{aligned} E[h_t] &= \omega + \alpha(\gamma^2 + (\mu_s^2 + \sigma_s^2)(\lambda_\infty + x\rho^{t-1})) + (\alpha + \beta)E[h_{t-1}] \\ &= \underbrace{\omega + \alpha(\gamma^2 + (\mu_s^2 + \sigma_s^2)\lambda_\infty)}_{a_0} + \underbrace{\alpha(\mu_s^2 + \sigma_s^2)x\rho^{t-1}}_{a_1} + \underbrace{(\alpha + \beta)}_b E[h_{t-1}] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{t-1} b^n + a_1 \sum_{n=0}^{t-1} b^n \rho^{t-1-n} + b^t E[h_0] \\ &= a_0 \cdot \frac{1 - b^t}{1 - b} + a_1 \frac{\rho^t - b^t}{\rho - b} + b^t h_0 \\ &= \frac{a_0}{1 - b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1 - b} - \frac{a_1}{\rho - b} \right) b^t + \frac{a_1}{\rho - b} \rho^t \end{aligned} \quad (28)$$

mit $a_0 = \omega + (\alpha + 0.5\gamma)(\mu_s^2 + \sigma_s^2)\lambda_\infty$, $a_1 = (\alpha + 0.5\gamma)(\mu_s^2 + \sigma_s^2)x$ und $b = \alpha + 0.5\gamma + \beta$, wobei $|b| < 1$.

Dieses Ergebnis (28) und die rekursive Form (11) in Gleichung (13) eingesetzt, liefert die Varianz des Preisprozesses

$$\text{Var}[\epsilon_t] = \frac{a_0}{1 - b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1 - b} - \frac{a_1}{\rho - b} \right) b^t + \left(\frac{a_1}{\rho - b} + x\kappa \right) \rho^t + \lambda_\infty \kappa, \quad (29)$$

mit $\kappa = \mu_s^2 + \sigma_s^2$.

Zur Darstellung der impliziten Volatilität wie in Gleichung (5) wird die Entwicklung von geometrischen Reihen genutzt. Triviales Umformen liefert eine explizite Form

$$\sigma_{\text{imp.}}(T) = \sqrt{c_0 + \frac{1}{T+1} \left((h_0 - c_0 - c_1) \frac{1 - b^{T+1}}{1 - b} + (c_1 + x\kappa) \frac{1 - \rho^{T+1}}{1 - \rho} \right) + \lambda_\infty \kappa}. \quad (30)$$

mit $c_0 = \frac{a_0}{1-b}$, $c_1 = \frac{a_1}{\rho-b}$ und $h_0 = \sigma_0^2 - \lambda_0\kappa$.

Die Berechnung der Varianz mit der Zeitstruktur eines TGARCH(1,1)-Modells erfolgt genauso wie die Berechnung unter Zuhilfenahme des AGARCH(1,1)-Modells. Auch die Struktur der impliziten Volatilität ist dieselbe. Einzig die Zusammensetzung der Parameter a_0 , a_1 und b unterscheiden sich voneinander.

3.1 Spezialfall: deterministische Sprungintensität

In den kommenden beiden Abschnitten werden die Spezialfälle deterministische Sprungintensität und kein Sprung betrachtet, die ebenfalls im 4. Abschnitt getestet werden. Das Vorgehen entspricht dem der Abschnitte 2.1 und 2.2.

Die Zeitstruktur der stochastischen Sprungintensität λ_t entfällt, um eine deterministische Sprungintensität λ_0 zu erhalten. Die Varianz von ϵ_t ändert sich zu

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\text{Var}[\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}]] = E[h_t + \lambda_0(\mu_s^2 + \sigma_s^2)] = E[h_t] + \lambda_0(\mu_s^2 + \sigma_s^2),$$

und somit auch der Erwartungswert von h_t

$$\begin{aligned} E[h_t] &= \omega + \alpha(\gamma^2 + \lambda_0(\mu_s^2 + \sigma_s^2)) + (\alpha + \beta)E[h_{t-1}] \\ &= \frac{a_0}{1-b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1-b}\right)b^t \end{aligned}$$

mit $a_0 = \omega + (\alpha + 0.5\gamma) \cdot \kappa\lambda_\infty$. Für die implizite Volatilität ergibt sich

$$\sigma_{\text{imp.}}(T) = \sqrt{c_0 + \frac{1}{T+1}(h_0 - c_0)\frac{1-b^{T+1}}{1-b} + \lambda_0\kappa}.$$

Diese Form kann erreicht werden, indem die Parameter aus Gleichung (30) $\rho = 0$ und $\lambda_0 = \eta$ gesetzt werden, wobei $h_0 = \sigma_0^2 - \lambda_0\kappa$ entspricht.

3.2 Spezialfall: Modell ohne Sprungprozess

Der zweite Spezialfall liegt der Annahme zu Grunde, dass kein Sprung stattfindet. Die Varianz hat die Form

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\text{Var}[\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}]] = E[h_t],$$

und für den Erwartungswert von h_t ergibt sich

$$\begin{aligned} E[h_t] &= \omega + \alpha\gamma^2 + (\alpha + \beta)E[h_{t-1}] \\ &= \frac{a_0}{1-b} + \left(h_0 - \frac{a_0}{1-b}\right)b^t \end{aligned}$$

mit $a_0 = \omega + \alpha\gamma^2$. Die implizite Volatilität wird dargestellt als

$$\sigma_{\text{imp.}}(T) = \sqrt{c_0 + \frac{1}{T+1}(h_0 - c_0)\frac{1-b^{T+1}}{1-b}}.$$

wobei $h_0 = \sigma_0^2$. Diese Form kann erlangt werden, indem die Parameter aus Gleichung (30) $\rho = 0$ und $\lambda_0 = \eta = 0$ gesetzt werden.

Die Berechnung der impliziten Volatilität mit integriertem deterministischen Sprungprozess und ohne einen Sprungprozess weist zwischen dem AGARCH(1,1)- und dem TGARCH(1,1)-Modell einzig Unterschiede im Parameter a_0 auf.

Die genaue Bestimmung der Parameter der sechs verschiedenen Modellkombinationen zur Darstellung der Volatilitätsoberfläche erfolgt im kommenden Abschnitt 4 an empirischen Daten.

4 GARCH-Parametrisierung

In diesem Abschnitt werden das AGARCH(1,1)-Modell und TGARCH(1,1)-Modell in Kombination mit Sprungprozessen und den beiden Spezialfällen (kein Sprung, deterministische Intensität) an 466 europäischen Optionen, deren Basiswert der DAX Index ist, getestet. Die Varianz der ersten Zeitscheibe $h_0 = \sigma_0^2 - \lambda_0 \kappa$ wird nach der Idee von Ho und Lee (1986) und Vasicek (1977) als Funktion in Abhängigkeit der inversen logarithmierten forward moneyness k dargestellt. Dadurch wird $\sigma_0^2(k) = \sigma_{\text{imp.}}^2(k)$ in Form von $h_0(k) = \sigma_{\text{imp.}}^2(k) - \lambda_0 \kappa$ in die behandelten GARCH-Modelle eingeführt. Für $\sigma_{\text{imp.}}^2(k)$ werden das SABR-Modell und die SVI-Parametrisierung verwendet, um festzustellen, welche der beiden Parametrisierungen die erste Zeitscheibe am besten approximiert.

4.1 SVI-Parametrisierung

Für die Approximation der ersten Zeitscheibe der impliziten Volatilität $\sigma_{\text{imp.}}^2(k)$ wird die SVI-Parametrisierung (stochastic volatility inspired) von Gatheral (2004) genutzt. Diese Funktion beschreibt eine Hyperbel.

$$\sigma_{\text{imp.}}^2(k) = c + d \cdot \left(\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \delta^2} \right), \quad (31)$$

wobei $k = \log[K/F_0]$ die inverse logarithmierte forward moneyness mit $F_0 = S_0 e^{rT}$ darstellt und die einzelnen Parameter wie folgt Einfluss auf die Kurve nehmen:

- c verschiebt die Kurve vertikal,
- d beeinflusst den Winkel zwischen der linken und rechten Asymptote,
- δ bestimmt, wie glatt der Scheitelpunkt ist,
- ρ bestimmt die Ausrichtung der Kurve,
- m verschiebt die Kurve horizontal.

Bei der Parametrisierung für $t_0 = 0.075$ (erste Zeitschreibe) wurden folgende Werte kalibriert: $c = -0.0054$, $d = 0.2057$, $\delta = 0.9795$, $\rho = 0.7607$ und $m = 0.1334$. Der Root Mean Square Error (RMSE)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\sigma_{\text{imp.}}(k_n, t_n) - \hat{\sigma}_{\text{imp.}}(k_n, t_n))^2} \quad (32)$$

ermöglicht den Vergleich zwischen der tatsächlichen impliziten Volatilität $\sigma_{\text{imp.}}$ und der approximierten impliziten Volatilität $\hat{\sigma}_{\text{imp.}}$ aller Modelle.

4.2 Parametrisierung mit dem SABR-Modell

Ein weiteres Modell zur Approximation von Volatilitäten basiert auf der Arbeit von Hagan et al. (2002). Das SABR-Modell wird häufig verwendet, da es eine einfache Implementierung bietet und eine gute Approximation der impliziten Volatilität liefert. Dieser Ansatz wird in dieser Arbeit einzig für die erste Zeitscheibe genutzt, $t_0 = 0.075$ und bekommt, genau wie die SVI-Parametrisierung durch GARCH-Modelle eine Zeitstruktur. Daher ist ein Spezialfall des SABR-Modells, $\beta = 0$ die optimale Wahl. Die implizite Volatilität wird berechnet durch

$$\sigma_{\text{imp.}}(k) = -\frac{\alpha k}{\chi(z)} \quad (33)$$

mit

$$z = -\frac{\alpha k}{v} \quad \text{und} \quad \chi(z) = \log \left[\frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right] \quad (34)$$

und $k = \log[K/F_0]$ stellt die inverse logarithmierte forward moneyness mit $F_0 = S_0 e^{rT}$ dar. Die Parameter haben folgenden Einfluss auf die Kurve:

- v (Volatilität) kontrolliert die Gesamthöhe der Kurve,
- α (Volatilität der Volatilität) bestimmt, wie glatt der Scheitelpunkt ist, d. h. wieviel „smile“ die Kurve zeigt,
- ρ (Korrelation) steuert die Schiefe (skew) der Kurve

und für diese drei Parameter sind die Werte $v = 0.0145$, $\alpha = 0.1279$ und $\rho = -0.6373$ geschätzt worden. Ein genauer Vergleich befindet sich im kommenden Abschnitt 4.3.

4.3 Vergleich SABR-Modell und SVI-Parametrisierung

Die Abbildung 1 stellt die Parametrisierung mit dem SABR-Modell dar, Abbildung 2 die SVI-Parametrisierung und Abbildung 3 die erste Zeitscheibe der originalen Volatilität. Um einen besseren optischen Vergleich anzustreben, sind in Abbildung 4 alle drei Abbildungen zusammengefasst. Anhand der Grafiken ist erkennbar, dass beide Modelle die implizite

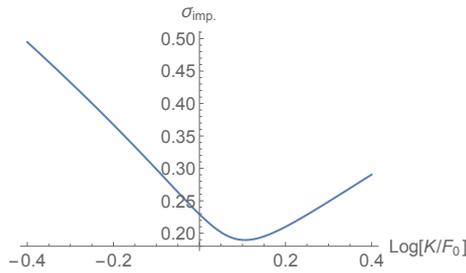


Abb. 1: SABR-Parametrisierung

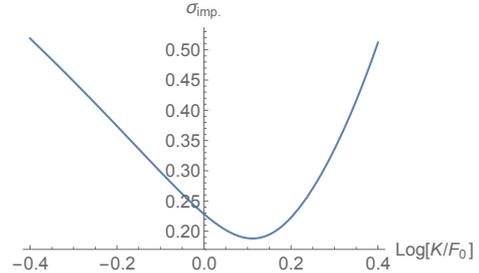


Abb. 2: SVI-Parametrisierung

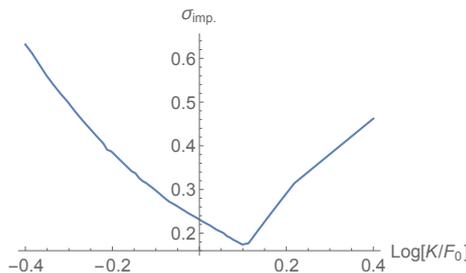


Abb. 3: erste Zeitscheibe ($t = 0.075$) der originalen Volatilität

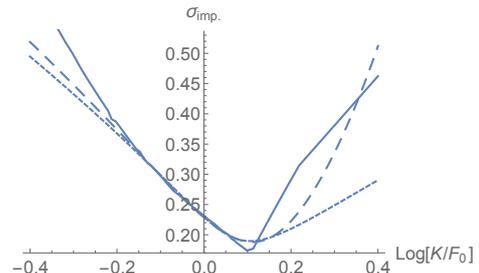


Abb. 4: Vergleich: SVI (gestrichelt), SABR (gepunktet), Original (Linie)

Volatilität für die negative moneyness gleich gut abbilden, die Volatilität der positiven moneyness allerdings von der SVI-Parametrisierung besser dargestellt werden kann. Zu beachten ist, dass sich die SVI-Parametrisierung nur auf die erste Zeitscheibe (kurze Laufzeiten) bezieht. Für längere Laufzeiten flacht die implizite Volatilität schnell ab und das SABR-Modell wäre die bessere Wahl. Dies wird auch anhand der Approximation der letzten Zeitscheibe deutlich, siehe dazu Tabelle 1.

Tabelle 1 zeigt die Parameter des jeweiligen Modells zur ersten und letzten Zeitscheibe. Der RMSE gibt den Fehler für t_0 und t_n mit den jeweiligen Parametern der Spalte an. Anhand der Zeit wird deutlich wie lange gebraucht wurde um das Ergebnis zu berechnen. Bei der Betrachtung des Fehlers für t_0 ist das SVI-Modell besser geeignet. Die Approximation mit Hilfe des SABR-Modells verläuft schneller aufgrund der geringeren Parameteranzahl und der RMSE für t_n ist deutlich kleiner als der der SVI-Parametrisierung. Die GARCH-Modelle verleihen diesen Parametrisierungen eine mit zunehmender Zeit abflachende Struktur um die Oberfläche der impliziten Volatilität zu approximieren. Das Modell flacht mit der SVI-Parametrisierung zu schwach ab, sodass der Fehler für kurze Laufzeiten zwar gering ist, aber für längere Laufzeiten größer wird. Im SABR-Modell verhält es sich genau umgekehrt. Der Fehler ist zu Beginn für kurze Laufzeiten höher als für lange Laufzeiten. Daher ist das SABR-Modell möglicherweise zu bevorzugen. Dies wird im folgenden Abschnitt 4.4 genauer untersucht.

Parameter	SVI-Parametrisierung		SABR-Modell	
	$t_0 = 0.075$	$t_n = 1.425$	$t_0 = 0.075$	$t_n = 1.425$
c	-0.0054	-0.00059	-	-
d	0.2057	-0.00011	-	-
δ	0.9795	4.66775	-	-
ρ	0.7607	2.74996	-	-
m	0.1334	3.39866	-	-
ν	-	-	0.0145	-0.6640
α	-	-	0.1279	0.0423
ϱ	-	-	-0.6372	0.0159
RMSE	0.227 %	1.817 %	0.266 %	0.092 %
Zeit in sek.	1.7	2.6	0.8	0.7

Tab. 1: Kalibrierte Werte der SVI-Parametrisierung und des SABR-Modells anhand der ersten $t_0 = 0.075$ und letzten Zeitscheibe $t_n = 1.425$.

4.4 Vergleich Heston- und GARCH-Modelle

In diesem Abschnitt werden die AGARCH- und TGARCH-Modelle untereinander und mit den originalen Daten verglichen. Zu dem wird das Heston-Modell als alternatives stochastisches Volatilitätsmodell (Benchmark) betrachtet. Für das Heston-Modell wurden folgende Parameter geschätzt:

- $v_0 = 0.0677975$ (initiale Volatilität des Modells),
- $\kappa = 9.03343$ (mean reversion speed),
- $\rho = -0.55221$ (Korrelation),
- $\alpha = 2.17821$ (Volatilität der Volatilität) und
- $\theta = 0.0822323$ (mean reversion level).

Der RMSE beträgt 1.979 %.

Die verschiedenen Parameter, der RMSE sowie die Dauer der Berechnungen sind in Tabelle 2 aufgelistet. Die im Vorfeld erläuterten Parameterisierungen bilden den Kopf der Tabelle und anhand der RMSEs ist deutlich zu erkennen, dass das SABR-Modell zur Verbesserung der Approximation beiträgt. Daher werden nur die Berechnungen des SABR-Modells ausgewertet.

Die Testergebnisse bzgl. der AGARCH- und TGARCH-Modelle weisen keine wesentlichen Unterschiede auf. Allerdings ist die Berechnungsdauer der TGARCH-Modelle etwas kürzer und der RMSE geringfügig besser. Die Implementierung eines Sprungprozesses führt sowohl beim AGARCH- als auch beim TGARCH-Modell zu keiner deutlichen Verbesserung. Die Modelle ohne Sprungprozess benötigen die geringste Anzahl zu schätzender Parameter und somit ist das TGARCH-Modell (ohne Sprung) mit SABR-Parametrisierung

die beste Wahl zur Approximation der Volatilitätsoberfläche. Die Abbildungen 5 und 6 zeigen die empirischen Daten und das Heston-Modell. Die Abbildungen 7 und 8 basieren auf einem TGARCH-Modell mit SABR- und SVI-Parametrisierung für $\sigma_{\text{imp.}}^2(k)$, ohne Sprungintensität. Anhand der Grafiken werden die vorher getroffenen Aussagen bestätigt. Die Modelle mit SVI-Parametrisierung sind für kurze Laufzeiten eindeutig besser, aber das SABR-Modell kann die Volatilität für einen langen Zeitraum besser darstellen. Die Abbildungen geben keinen Aufschluss darüber, ob das Heston- oder das TGARCH-Modell zu bevorzugen ist. Erst durch den Vergleich der RMSEs wird deutlich, dass das TGARCH-Modell die Volatilitätsoberfläche am besten annähert.

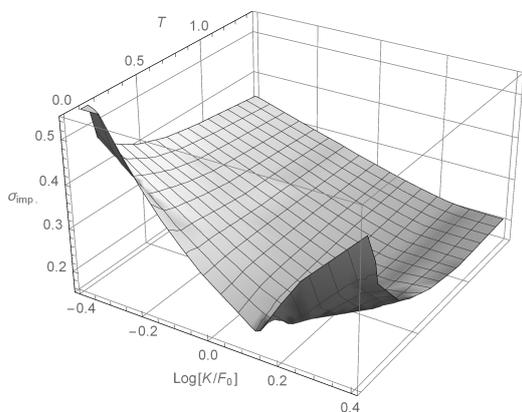


Abb. 5: Empirische Daten

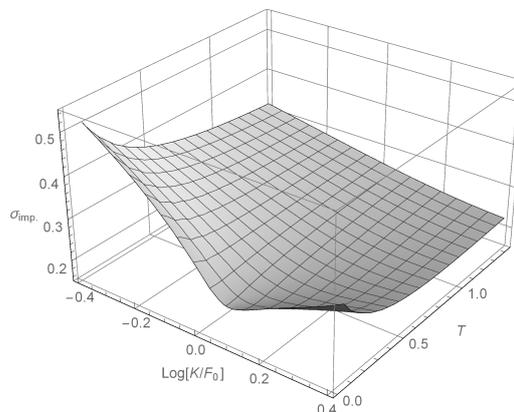


Abb. 6: Heston-Modell

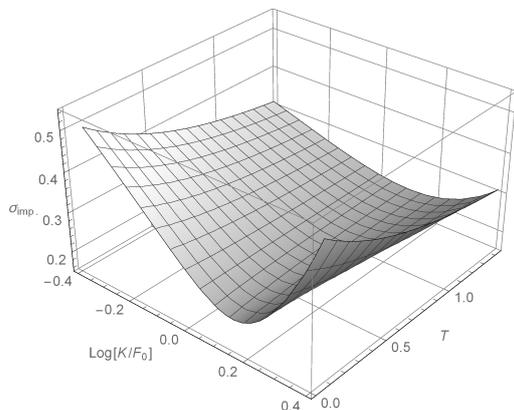


Abb. 7: TGARCH-Modell, SVI,
ohne Sprung

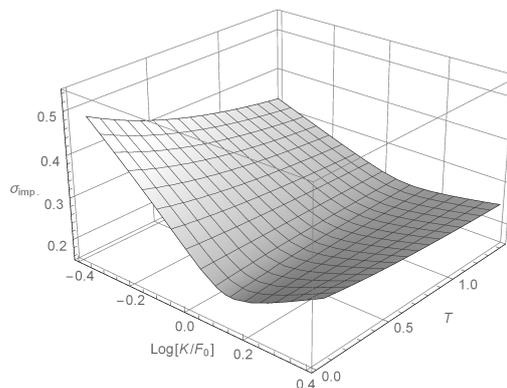


Abb. 8: TGARCH-Modell, SABR,
ohne Sprung

Parameter	SVI-Parametrisierung						SABR-Modell					
	AGARCH(1, 1)-Modell			TGARCH(1, 1)-Modell			AGARCH(1, 1)-Modell			TGARCH(1, 1)-Modell		
	λ null	λ det.	λ sto.	λ null	λ det.	λ sto.	λ null	λ det.	λ sto.	λ null	λ det.	λ sto.
ω	-0.000069	-0.0012	-0.00116	$-2.8 \cdot 10^{-6}$	-0.00024	$-5 \cdot 10^{-6}$	-0.00007	-0.001	-0.00155	$2 \cdot 10^{-6}$	-0.00128	-0.0012
α	0.1435	0.1454	0.1454	0.2253	0.3231	0.2253	0.1453	0.1469	0.1486	0.1157	0.1168	0.1169
β	0.8433	0.8415	0.8415	0.7230	0.6229	0.7248	0.8451	0.8436	0.8420	0.8558	0.8543	0.8543
γ	0.0224	0.0338	0.0337	0.0815	0.0815	0.0726	0.0224	0.0340	0.0344	0.0379	0.0384	0.0384
λ_0	-	0.0619	0.0590	-	0.0415	0.0501	-	0.0529	0.0786	-	0.0849	0.0817
κ	0	0.1061	0.1061	-	0.0157	0.0001	0	0.1053	0.1109	-	0.1039	0.1038
ρ	-	0	0.1002	-	0	0.0301	-	0	0.0982	-	0	0.1003
η	-	λ_0	0.0533	-	λ_0	0.5001	-	λ_0	0.0710	-	λ_0	0.0735
RMSE	2.85 %	2.85 %	2.85 %	2.85 %	2.85 %	2.85 %	1.73 %	1.73 %	1.72 %	1.72 %	1.72 %	1.72 %
Zeit	6.4	7.0	7.4	4.9	5.7	7.5	7.2	7.4	9.8	4.5	6	6.8

Tab. 2: Kalibrierte Werte der verschiedenen Modelle, RMSE in Prozent und Kalibrierungsdauer in Minuten

5 Zusammenfassung (Ausblick)

In diesem Artikel wurden AGARCH(1,1)- und TGARCH(1,1)-Modelle mit Poisson-Prozessen kombiniert und zur Approximation der impliziten Volatilitäts Oberfläche untersucht. Ausgehend von einem stochastischen Sprungprozess sind die Spezialfälle: deterministischer Sprungprozess (Prozess mit konstanter Sprungintensität) und GARCH-Modelle ohne Sprungprozess betrachtet worden. Die Integration von Sprüngen führte zu keiner wesentlichen Verbesserung der Approximation. Einzig die Kalibrierungsdauer als Entscheidungskriterium für die Wahl des GARCH-Modells spricht für das TGARCH-Modell. Zudem sind zwei verschiedene Parametrisierungen für die erste Zeitscheibe analysiert worden. Die SVI-Parametrisierung bietet im Vergleich zum SABR-Modell bei der Betrachtung der ersten Zeitscheibe das bessere Ergebnis. Erst die Approximation der gesamten Volatilitäts Oberfläche ließ auf das SABR-Modell als beste Wahl schließen. Folglich erreicht die Verwendung des TGARCH-Modells mit SABR-Parametrisierung und ohne Sprungprozess die beste Approximation. Diese Modellkombination benötigt eine kurze Berechnungsdauer und im Verhältnis zu den anderen Modellen sind weniger Parameter zur Kalibrierung notwendig. Zudem weist es den geringsten RMSE auf und bietet deshalb eine bessere Approximation als das Heston-Modell, wobei die Differenz zu den Fehlerwerten der anderen GARCH-Modelle sehr gering ist.

Die Forschungen könnten auf andere GARCH-Modelle ausgeweitet werden um eine noch bessere Approximation zu erreichen. Ebenfalls wäre die Verbesserung der Modelle für σ_0^2 ein weiterer Forschungsansatz, der die Kalibrierung für alle Laufzeiten und nicht nur für die erste Zeitscheibe beinhaltet oder dem ein völlig anderes Modell zugrunde liegt.

A Erwartungswert von ϵ_t

Der erste Teil des Anhangs zeigt den Beweis, dass $E[\epsilon_t] = 0$ ist. Dazu wird noch einmal das Ausgangsmodell betrachtet

$$\Delta x_t = r + \epsilon_t = r + \sqrt{h_t} z_t + \sum_{j=0}^{N_t} y_{j,t} - \mu_s \lambda_t,$$

$$y_{j,t} \sim \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s^2), \quad N_t \sim \text{Poi}(\lambda_t).$$

Beweis:

Da z_t normalverteilt ist mit Erwartungswert null, fällt der erste Term weg und es bleibt nur noch zu betrachten

$$E[\epsilon_t] = E[E[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E \left[\sum_{j=0}^{\infty} E[y_{j,t} | N_t = j, \mathcal{F}_{t-1}] \cdot P(N_t = j | \mathcal{F}_{t-1}) - \mu_s \lambda_t \right]$$

$$= E \left[\sum_{j=0}^{\infty} \mu_s \cdot j \cdot e^{-\lambda_t} \frac{\lambda_t^j}{j!} - \mu_s \lambda_t \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\mu_s \cdot \lambda_t \cdot e^{-\lambda_t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_t^{j-1}}{(j-1)!} - \mu_s \lambda_t \right] \\
&= \mu_s E[\lambda_t] - \mu_s E[\lambda_t] = 0.
\end{aligned}$$

□

B Erwartungswert von ϵ_t^2

Teil B des Anhangs zeigt den Beweis, dass der Erwartungswert $E[\epsilon_t^2] = E[h_t] + E[\lambda_t](\mu_s^2 + \sigma_s^2)$ ist. Dazu wird noch einmal das Ausgangsmodell betrachtet

$$\begin{aligned}
\Delta x_t &= r + \epsilon_t = r + \sqrt{h_t} z_t + \sum_{j=0}^{N_t} y_{j,t} - \mu_s \lambda_t, \\
y_{j,t} &\sim \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s^2), \quad N_t \sim \text{Poi}(\lambda_t).
\end{aligned}$$

Beweis:

Da $E[\epsilon_t] = 0$ ist, wie in Anhang A gezeigt, entspricht

$$E[\epsilon_t^2] = \text{Var}[\epsilon_t].$$

Mit Hilfe der Varianzzerlegung

$$\text{Var}[\epsilon_t] = \text{Var}[E[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] + E[\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]]$$

und $\text{Var}[E[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = 0$ folgt $E[\epsilon_t^2] = \text{Var}[\epsilon_t] = E[\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]]$. Im nächsten Schritt wird $\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ näher betrachtet

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x | \mathcal{F}_{t-1}) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(x | N_t = n, \mathcal{F}_{t-1}) P(N_t = n | \mathcal{F}_{t-1}) \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x | N_t = n, \mathcal{F}_{t-1}) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot E[\epsilon_t^2 | N_t = n, \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot (\text{Var}[\epsilon_t | N_t = n, \mathcal{F}_{t-1}] + E[\epsilon_t | N_t = n, \mathcal{F}_{t-1}]^2) \\
&= h_t + \lambda_t (\mu_s^2 + \sigma_s^2).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den Erwartungswert

$$E[\epsilon_t^2] = E[\text{Var}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[h_t + \lambda_t (\mu_s^2 + \sigma_s^2)] = E[h_t] + E[\lambda_t] (\mu_s^2 + \sigma_s^2)$$

□

Literatur

- Bates, D. S. (1996): Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsch Options. *The Review of Financial Studies*, 9(1):69–107.
- Black, F. und M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654.
- Bollerslev, T. (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327.
- Chan, W. H. und J. M. Maheu (2002): Conditional Jump Dynamics in Stock Market Returns. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):377–389.
- Derman, E. und i. Kani(1994): Riding on a Smile. *Risk Publications*, 7(2):32–39.
- Dupire, B. (1994): Pricing with a Smile. *Risk Publications*, 7(1):18–20.
- Engle, R.F. (1982): Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007.
- Engle, R.F. (1990): Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of '87. *Review of Financial Studies*, 3(1):103–106.
- Franke, J.; W. Härdle und C. Hafner (2011): *Statistics of Financial Markets An Introduction*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Aufl.
- Gatheral, J. (2004): A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives. *Presentation at Global Derivatives & Risk Management, Madrid (2004)*
- Gatheral, J. (2006): *The Volatility Surface - A Practitioner's Guide*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Glosten, L. R.; R. Jagannathan und D. E. Runkle. (1993): On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *The Journal of Finance*, 48(5):1779–1801.
- Greene, W. H. (2003): *Econometric Analysis*. Pearson, New Jersey, 5. Aufl.
- Hagan, P. S.; D. Kumar; A. S. Lesniewski und D. E. Woodward (2002): Managing Smile Risk. *WILMOTT magazine*, Januar 2002, S. 84–108.
- Heston, S. L. (1993): A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(3):327–343.

- Ho, T. S. Y. und Lee, S.-B. (1986): Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Wiley*, 41(5):1011-1029.
- Hull, J. C. (2011): *Options, Futures and other Derivatives*. Pearson Verlag, München, 8. Aufl.
- Hull, J. und White, A. (1987): The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2):281-300.
- Merton, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141-183.
- Merton, R. C. (1976): Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3:125-144.
- Moodley, N. (2005): The Heston Model: A Practical Approach. *University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa*, 1-53.
- Neftci, S. N. (2000): *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, New York, 2. Aufl.
- Stein, E. M. und Stein, J. C. (1991): Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *Oxford Journals*, 4(4):727-752.
- Vasicek, O.(1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177-188.
- Wilmott, P. (2006): *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, England.